CONTENIDO

TABLAS

FIGURAS

1. INTRODUCCIÓN

Las matemáticas ocupan un lugar central en los programas escolares de todos los países. En México, su importancia se refleja en la *curricula* de las escuelas incorporadas a la Secretaría de Educación Pública (SEP) y de las diferentes universidades del país. Desde 1984, en el 5º Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME) en Adelaide, Australia, se manifestó la inquietud de proveer un programa de matemáticas apropiado para la gran mayoría de los estudiantes, tomando en cuenta sus niveles de escolaridad. El tema propuesto para el congreso fue “Matemáticas para todos” (D’ Ambrosio, 1993). Asimismo, se sentaron las bases para la discusión y desarrollo de la educación matemática, al proponer llevar a cabo encuentros del ICME cada 4 años. Desde entonces ha crecido el interés por desarrollar esta materia.

En México, se llevó a cabo el Primer Congreso Nacional de Investigación Educativa en 1981 y diez años después, se realizó un segundo congreso, cuyo propósito principal fue hacer un balance de la investigación educativa desarrollada desde 1982 hasta 1992, y señalar las perspectivas para los años 90. En dicho evento, participaron 80 dependencias e instituciones educativas, y se analizaron seis áreas de conocimiento, entre ellas, las matemáticas en la educación.

Bonilla, Block y Waldegg (1993) publicaron un compendio de los trabajos de dicho congreso que abarca los temas de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En el documento mencionado, se señala la tendencia que existía en la década de los 70 hacia ciertas líneas de investigación, como son: la elaboración de textos y la formación de profesores. Es hasta la década de los 80 que se abrió una nueva línea de investigación hacia la didáctica de las matemáticas centrada en el nivel básico educativo, cuyo objetivo fue formar especialistas que enfoquen su trabajo hacia la problemática del proceso enseñanza-aprendizaje en matemáticas.

A partir de entonces se consolidaron diferentes grupos de investigación sobre educación matemática: el Departamento de Matemática Educativa (DME), del Centro de Investigación y Estudios Avanzados (CINVESTAV) del Instituto Politécnico Nacional (IPN), la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), el Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT) en Guanajuato, la Universidad Pedagógica Nacional (UPN), la Escuela Normal Superior (ENS), la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas A. C., así como algunos departamentos y grupos de profesores de diferentes universidades estatales, como Sonora y Guerrero, entre otras.

En sus trabajos de investigación sobre educación matemática, Mancera (1991) afirmó que el desarrollo de las nociones matemáticas es un proceso paulatino que construye el niño a partir de las experiencias que le brinda la interacción con los objetos de su entorno, permitiéndole crear mentalmente relaciones y comparaciones entre ellos, estableciendo semejanzas y diferencias de sus atributos para clasificar, establecer relaciones de orden y de cantidad, que le posibilitan estructurar el concepto de número. Un punto que parece central en el éxito de los alumnos que son considerados buenos calculadores en operaciones matemáticas, se debe precisamente, a que dichos alumnos desarrollan la intuición de cantidad. Esta intuición ha sido definida como sentido del número por el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 1989).

Varios autores que se refieren al sentido del número en sus investigaciones lo han definido de diferentes formas. Sowder (1992), por ejemplo, se refiere a él como una red conceptual bien organizada que da habilidad para relacionar operaciones, y para resolver problemas numéricos por caminos flexibles y creativos. Asimismo, agrega que el entendimiento de la estructura del sistema numérico y el sentido del número están asociados con la habilidad en cálculo mental. Resnick (1989), por su parte, lo caracteriza como un pensamiento de alto orden que involucra juicios, interpretaciones, incertidumbre con autorregulación, significados y el intuir que existen múltiples soluciones a un mismo problema; asimismo, comenta que es evidente cuando una persona lo tiene, por la facilidad relativa con que enlaza en su memoria situaciones específicas. En el presente trabajo se maneja el sentido del número basado en dichas definiciones.

Un elemento que se considera central para desarrollar el sentido del número en los estudiantes, es el cálculo mental estimado o estimativo, el cual se entiende como la habilidad para llevar a cabo un cálculo numérico, del cual se obtiene una respuesta no exacta, utilizando únicamente procedimientos mentales, sin el uso de lápiz y papel o cualquier otro dispositivo de cálculo o registro (Hazekamp, 1986; Reys, Reys y Hope, 1993). De hecho, los procedimientos propiamente mentales que el alumno lleva a cabo en este tipo de cálculos son diferentes a aquellos que se realizan cuando se recurre a los algoritmos de lápiz y papel, enseñados en el aula.

El cálculo mental estimado ha sido reconocido como un tema importante dentro del campo de la educación matemática, por lo que varios países como Estados Unidos, a través del NCTM (Crosswhite, Dossey y Frye, 1989) y Japón a través del *Japan Ministery of Supervisors of Mathematics*, (Flores, Reys y Reys, 1990) han recomendado su inclusión en el currículum escolar. Con relación a México, la Secretaría de Educación Pública, quién tiene a su cargo la educación del país, recomienda en sus programas de matemáticas de educación básica que se utilice el cálculo mental como un apoyo para el estudio de los números enteros y decimales. Sin embargo, los programas no resaltan la importancia de una práctica sistemática y continua del mismo.

El cálculo de resultados aproximados, permite a los alumnos tener una visión más amplia del sistema numérico y una mejor utilización del mismo, a la vez que ayuda al estudiante a inventar procedimientos apropiados para solucionar cada problema en particular (Sowder, 1989). El cálculo estimativo se define como una interacción o combinación de cálculos mentales, conceptos numéricos, habilidades en técnicas aritméticas y saber hacer compensaciones en el resultado final, pues como su nombre lo indica no se obtiene un resultado exacto, pero sí debe estar cercano a éste.

Un ejemplo que ilustra una situación de la vida cotidiana donde se utiliza, preferentemente, el cálculo estimativo es el siguiente:

> *Si se quieren comprar tres cuadernos de $7.90 cada uno, un lápiz de $2.50, un borrador de $3.90 y sólo se tienen $30.00. ¿Se tiene suficiente dinero para realizar la compra?*

Algunos investigadores como Reys, Bestgen, Rybolt y Wyatt (1982), de la Universidad de Missouri, centraron sus trabajos en la comprensión de los procesos mentales que se llevan a cabo cuando los estudiantes utilizan cálculos estimativos. Dichos autores trabajaron con niños de séptimo, octavo y noveno grado, que en México equivalen al nivel de secundaria, con quienes iniciaron una serie de investigaciones para conocer las estrategias que utilizan los estudiantes que son considerados buenos estimadores, así como sus procesos de pensamiento.

El grupo de la Universidad de Missouri decidió replicar su investigación en diversas regiones del mundo con culturas muy diferentes entre sí, para indagar la influencia que ejerce en los estudiantes la cultura propia de cada país en el campo del cálculo estimativo. De las regiones estudiadas, se encuentran Guanajuato, México (Flores *et al*., 1990) y Tsuchiura, Japón (Reys, Reys, Nohda, Ishida, Yoshikawa y Shimizu 1991). En ambos países se detectaron algunas estrategias y procesos encontrados en la investigación de Missouri (Reys *et al*., 1982), aunque en México también se reportó que los estudiantes no están acostumbrados a trabajar con cálculo estimativo.

Algunos de los propósitos fijados en las investigaciones mencionadas anteriormente sobre cálculo estimativo fueron los siguientes: medir la actitud de los estudiantes hacia el cálculo escrito y hacia el cálculo mental, indagar la clase de cálculos que los estudiantes prefieren hacer mentalmente, evaluar su desempeño en cálculo mental, caracterizar las estrategias que utilizan los estudiantes que son considerados buenos estimadores, formar un marco teórico y conceptual que caracterice los procesos del pensamiento y las estrategias de cálculo mental utilizadas por los estudiantes.

En la presente investigación se planteó el propósito de identificar y caracterizar las estrategias de cálculo estimativo que utilizan los alumnos de segundo grado de secundaria que son considerados buenos estimadores. Asimismo, un segundo propósito es contribuir a ampliar un marco teórico que pueda ser utilizado en la preparación de material didáctico, tanto para los alumnos como para cursos de capacitación para profesores. El reporte final de resultados del presente estudio y sus conclusiones servirán por sí mismos para el propósito señalado.

Para lograr el primer propósito, se tomó como punto de partida la investigación desarrollada en el CIMAT, dirigida por Flores *et al*. (1990) en colaboración con la Universidad de Missouri. Los investigadores aplicaron un instrumento a 177 estudiantes de segundo nivel de secundaria para detectar a los mejores calculadores e investigar las estrategias que utilizan dichos alumnos para resolver problemas de cálculo estimativo. Esto último se desarrolló a través de entrevistas aplicadas a los alumnos seleccionados.

Una conclusión de la investigación mencionada hace notar que la estimación de operaciones aritméticas y problemas que las incluyen, no se enseñan en forma explícita en las escuelas, por lo que recomienda que se dedique menos tiempo a los métodos tradicionales con lápiz y papel y se ponga más atención a los cálculos mentales, en especial al cálculo estimado. Para lograr lo anterior, se debe motivar a los profesores para que lo incluyan en sus programas, y apoyarlos con materiales que les faciliten y guíen en su trabajo. Entre las sugerencias, se recalca que no se enseñe el cálculo mental como un tema separado, sino que se integre sistemáticamente en los programas de estudio.

En el presente trabajo se consideró de suma importancia la recomendación anterior, porque tanto el alumno como el maestro no deben estar preocupados sólo por obtener calificaciones aprobatorias. Una de las principales características de la enseñanza de las matemáticas es procurar el desarrollo de habilidades en los alumnos que les permitan manejar con soltura el número y sus propiedades; precisamente, el cálculo estimativo es una opción muy adecuada.

1.1 Planteamiento del problema

El problema que se aborda en esta investigación es que en las escuelas secundarias no se logra desarrollar el sentido del número en los alumnos, quiénes en su mayoría sólo copian o repiten los ejercicios que se les enseñan en sus clases creyendo, a la vez, que la manera de resolverlos es única. Por otro lado, en los programas de matemáticas existe la recomendación de incluir la enseñanza del cálculo mental estimativo en forma explícita, pero sin hacer énfasis sobre su relación con el objetivo de desarrollar el sentido del número.

Hope (1986) y Reys *et al*. (1993) puntualizaron que a pesar de todas las recomendaciones para incluir la enseñanza del cálculo estimativo en los programas de estudio, los maestros no lo enseñan. Asimismo, Hope (*op. cit.*) apuntó que el cálculo estimativo no es anacrónico, sino una habilidad básica que debe ser enseñada y practicada en las escuelas. Señaló también que estudiar aritmética debería ayudar a los niños a pensar y razonar con números y muy particularmente deberían darse cuenta de que esta parte de las matemáticas es rica en significados.

Con base en lo anterior, es conveniente puntualizar la importancia de desarrollar investigaciones acerca de los mecanismos para integrar eficientemente la enseñanza del cálculo estimativo en los programas de estudio.

1.2 Supuestos

Este trabajo partió de los siguientes supuestos:

- Los alumnos exitosos en trabajos de cálculo estimativo, tienen buen desempeño general en matemáticas.
- El cálculo estimativo no se enseña en las escuelas mexicanas de manera sistemática, por lo que es bajo el desempeño general de los alumnos en dicho tópico.

1.3 Objetivos

Los objetivos de este estudio fueron los siguientes:

Objetivo general:

Caracterizar los procesos mentales y las estrategias de cálculo mental que utilizan los alumnos de segundo grado de educación media que son considerados buenos estimadores, en el municipio de Ensenada, Baja California.

Objetivos específicos:

- Determinar el tipo de estrategias que utilizan los buenos estimadores.
- Conocer el aprovechamiento escolar en matemáticas de los alumnos considerados buenos estimadores.
- Contribuir en el conocimiento de las estrategias de cálculo estimativo que utilizan los alumnos de secundaria.

1.4 Importancia del estudio

Reys *et al*. (1982) llevaron a cabo una investigación con el propósito de que sus resultados se reflejaran en una revisión y adecuación de los programas escolares de matemáticas, para incluir la enseñanza sistemática del cálculo estimativo. De manera análoga, se interesaron en replicar su trabajo en otras partes del mundo con culturas diferentes, con el fin de analizar nuevos resultados y conclusiones. Por lo tanto, los resultados de la presente investigación podrán contribuir a aumentar el conocimiento sobre cálculo estimativo que se ha formado a través de dichas investigaciones.

Asimismo, los resultados de este estudio, ayudarán a los estudiantes en su forma de aprender, y a los docentes de matemáticas en la forma de enseñar las propiedades semánticas conocidas referentes a los números, tanto en la búsqueda de soluciones a problemas como para evitar cálculos inapropiados.

En el presente estudio, también se destaca el interés de que las autoridades educativas del municipio de Ensenada conozcan los resultados que se pueden obtener en el aprovechamiento escolar de los estudiantes con la práctica continua y sistemática del cálculo estimativo. Actualmente, los representantes del departamento encargado de la materia de matemáticas en educación media, han brindado al presente trabajo todo el apoyo que se ha requerido para llevarlo a cabo y se han mostrado interesados en apoyar futuras investigaciones, sobre todo en lo que se refiere a la aplicación de un programa de cálculo estimativo a un grupo piloto de primer grado de secundaria, durante los 3 años que dura su educación media, para evaluar el desarrollo del sentido del número en los alumnos y observar los resultados en su aprovechamiento escolar.

Una justificación a la decisión de trabajar con alumnos de educación media, se encuentra en la afirmación de Case (1985; citado en Sowder, 1989), quien dice que un entendimiento real de cálculo estimativo ocurre aproximadamente a la edad de 11 años. La situación anterior se tomó en cuenta para el presente estudio y se eligió una muestra de estudiantes de segundo grado de secundaria que equivale al octavo grado en otros sistemas educativos diferentes al mexicano. Asimismo, se atendió a las recomendaciones que arrojaron los resultados de las investigaciones de Missouri y Guanajuato que reportaron entre otras cosas, la escasa atención que se le da al cálculo estimativo en las escuelas y la importancia de que se hagan investigaciones sobre dicho tema que justifiquen el implantar conceptos, estrategias y el espíritu de la enseñanza del mismo.

1.5 Limitaciones del estudio

La presente investigación se basó en los estudios de Missouri (Reys *et al.,* 1982) y Guanajuato (Flores *et al.,* 1990). Se consideró la ciudad de Ensenada por la diferencia sociocultural con las regiones mencionadas. De lo anterior, los resultados aquí obtenidos sólo son aplicables a dicha zona de estudio.

El tipo de muestreo utilizado en el presente trabajo fue aleatorio estratificado. La idea de utilizar dicho muestreo fue abarcar todas las posibilidades que hay en educación media, referentes a tipo de escuela, turno y nivel socioeconómico.

Para poder escoger la muestra más representativa, se llevaron a cabo algunas pruebas en distintas escuelas. Sin embargo, en una escuela secundaria de turno vespertino, en donde se inscriben sólo alumnos rechazados de todas las demás escuelas, se encontró que los alumnos no mostraron tener habilidades de cálculo mental estimativo, y debido a que el propósito del estudio es detectar a los buenos estimadores, no se tomó en cuenta esta escuela para la investigación.

Por otro lado, no se contó con el apoyo de los directivos de algunos colegios particulares, quienes pidieron requisitos que no se podían solventar de inmediato. Sin embargo un colegio particular, sí aceptó que se llevará a cabo la investigación en su plantel, y brindó todo el apoyo requerido.

Finalmente, se puede señalar que la enseñanza del cálculo mental requiere de un trabajo previo, especialmente en la elaboración de material didáctico de apoyo.

2. ANTECEDENTES

En el presente capítulo se hace una breve reseña sobre el desarrollo de una rama de las matemáticas enfocada exclusivamente a la educación matemática, considerada actualmente como una disciplina independiente. Dentro de esta disciplina surge el interés por el cálculo numérico mental estimativo, apoyado en la psicología cognoscitiva. Asimismo se presenta un panorama de investigaciones llevadas a cabo en educación matemática sobre cálculo mental.

2.1 Educación matemática.

Se presenta a continuación un breve recorrido sobre los acontecimientos que llevaron a la creación de la educación matemática como una disciplina independiente.

Castelnuovo (1989) anota que la dificultad de las matemáticas se centra en la incomprensión de la gente ante esta asignatura. Agrega que no sólo se trata de una incomprensión vaga e incierta, se deriva más bien de la forma en que la mayoría de la gente recibe su enseñanza en los planteles escolares. Se ha llegado a concluir que la enseñanza de las matemáticas ha sido repetitiva y mnemotécnica a través del tiempo, basando esta aseveración en documentos muy antiguos, como son, varias tablillas de arcilla encontradas en Babilonia, antes de 1800 a. C., hasta las formas de enseñanza que se siguieron en la época de la matemática moderna. Paralelamente a dicho problema, se observa que la educación fue reservada durante mucho tiempo a las clases privilegiadas.

Con la revolución francesa en el siglo XVIII y las ideas de la ilustración que trajeron como consecuencia la independencia de las colonias americanas, se abrieron escuelas públicas para que todos los niños tuvieran acceso a la educación. Para poder organizar dichas escuelas, se crearon planes y programas en donde queda asentada la enseñanza de las matemáticas, pero siempre con el mismo carácter mnemotécnico y repetitivo.

En el siglo XX, a principios de los años 50, se empezó a manifestar un descontento general por el carácter abstracto de las matemáticas, pero fue hasta finales de esta década cuando estalló una crisis derivada del lanzamiento del primer satélite al espacio, el *Sputnik* en 1957, por los rusos. Con dicho acontecimiento los Estados Unidos sintieron que fueron rebasados en tecnología por Rusia y esto provocó una verdadera preocupación, pues si esa situación seguía, los rusos pronto conquistarían al mundo. Por lo anterior, Estados Unidos llevó a cabo nuevos proyectos educativos, creyendo que con esto prepararía a su juventud para evitar una conquista tecnológica (Meza, 1994).

Entre 1959 y 1960 se sentaron las bases para llevar a cabo una reforma en los programas de matemáticas en Estados Unidos y Europa, con la idea de formar técnicos, ingenieros y científicos que alcanzaran el nivel de los rusos. Los matemáticos tomaron en sus manos el problema y lo enfocaron a lo que se llamó la matemática moderna, cuyo nivel de abstracción resultó ser mayor al que ya existía y terminó desvinculando a la matemática escolar de la realidad que vivían los niños (Ruíz, 1992).

La intención original de la matemática moderna, sin embargo, no fue mala, se trataba de preparar a los niños y jóvenes para que tuvieran una relación con las matemáticas universitarias. Pero la manera en que se organizó, buscó su fundamento en la teoría de conjuntos y englobó a las matemáticas en dos grandes ramas, el álgebra y la topología, que a la vez se subdividieron: la primera en grupos, anillos, cuerpos, etcétera, y la topología en grupos, espacios compactos, espacios convexos, entre otros (Ruiz, *op. cit.*).

Los países latinoamericanos no tardaron en recibir el impacto de la reforma, y en 1966 se fundó un comité que los representó y sentó las bases para reformar los *curricula* escolares y diseñar los programas para el entrenamiento de profesores.

Sin embargo, a inicios de los 70 empieza a hacerse patente el rechazo a dicha reforma, desde los padres de familia, profesores y alumnos hasta investigadores matemáticos como es el caso de Kline (1976), quien escribe un libro titulado *¿Por qué Juanito no sabe sumar?* donde hace una abierta crítica a la matemática moderna. Fue de este modo que mundialmente se decidió regresar paulatinamente a lo básico en matemáticas y se creó una atmósfera que dio lugar a una nueva disciplina: la educación matemática.

Después del fracaso de la matemática moderna, el panorama mundial era ideal para recibir el nacimiento de la educación matemática. Se empezaron a formar en el mundo una gran cantidad de grupos y foros para discutir e informar de los avances en dicha disciplina.

Por ejemplo, se puede considerar que un grupo representativo de los Estados Unidos es el *National Council of Teachers of Mathematics (*NCTM*)*, organización manejada por voluntarios de varias partes de la unión americana que suman 15,000 personas. Dichos voluntarios hacen los programas de trabajo y atienden a 261 grupos afiliados, con 190,000 miembros (Lindquist, 1994).

En México, a partir de 1975 se crea la primera Maestría en Educación Matemática en el Departamento de Investigaciones Educativas del CINVESTAV. Para finales de 1992, ya había alrededor de 100 graduados que de alguna manera han sido responsables de diversos proyectos en todo el país. Después de la creación de dicha maestría fueron naciendo distintos grupos interesados en la materia, que dependían de otras universidades o dependencias gubernamentales (Waldegg, 1993).

Las organizaciones mexicanas que se dedican a la investigación sobre educación matemática, han mantenido un contacto académico y de participación con diversos grupos y foros internacionales (ver tabla I).

Tabla I. Ejemplos de foros internacionales donde se discuten temas de educación matemática.

Grupo	Siglas	Foros	Tipo
Internacional	ICME	*International Congress of Mathematical Education*	Congreso
Internacional	SIEM	Simposio Internacional de Educación Matemática	Simposio
Interamericano	CIAEM	Conferencias Interamericanas de Educación Matemática	Conferencias
Iberoamericano	CIBEM	Congreso Iberoamericano de Educación Matemática	Congreso

Respecto a una definición sobre educación matemática, aun no se llega a un consenso, pues esta disciplina sigue cambiando y encontrando su propia personalidad.

Un punto de vista interesante de Higginson (1980; citado en Bonilla, 1989) reportó que los componentes fundamentales de la educación matemática fueron en sus inicios: la matemática, la filosofía y la psicología. Después de la década de los 70, se agrega la sociología y más adelante la antropología, debido a que también utiliza el método de observación participante. Últimamente también se le vincula con la lingüística, ya que la comunicación es uno de sus principales objetivos.

2.2 Cálculo mental estimativo basado en la psicología cognoscitiva del aprendizaje.

Se considera la presente investigación dentro del enfoque cognoscitivo de la psicología del aprendizaje, debido a que su objetivo es identificar, describir y caracterizar los procesos mentales y las estrategias de cálculo mental que utilizan los alumnos de segundo grado de educación media que son considerados buenos estimadores. Precisamente, dentro de dicha corriente, lo que se busca es conocer la manera como la gente piensa, aprende conceptos y soluciona problemas, ya que el ser humano es considerado un procesador activo de información que busca, reelabora y crea información.

La presente investigación sin embargo, no tiene la intención de desarrollar teorías para describir los procesos mentales en general, sino más bien identificar, describir y caracterizar razonablemente un conjunto limitado de observaciones sobre los procesos que utilizan los alumnos al hacer estimaciones. En este sentido, Reys *et al*. (1982) y Flores *et al*. (1990) identificaron tres procesos mentales:

i) Reformulación: consiste en cambiar los datos numéricos dejando intacta la estructura del problema.
ii) Traducción: consiste en cambiar los datos numéricos al mismo tiempo que se cambia la estructura del problema.
iii) Compensación: consiste en hacer ajustes numéricos finales a los resultados de los problemas para acercarlos al resultado exacto.

Con respecto a las estrategias, De Vega (1986) las define como técnicas que utilizan las personas para controlar la información que poseen y su finalidad es ayudar a lograr un objetivo. El presente estudio se centró en las estrategias de cálculo mental estimativo y se basó en la clasificación que reportó Reys (1986) y que se detallan en el siguiente apartado. La tabla II muestra los procesos y las estrategias de cálculo estimativo incluidas en dichos procesos de acuerdo a las investigaciones mencionadas.

Tabla II. Procesos mentales identificados cuando se trabaja con cálculo estimativo (Reys *et al., 1982*) y estrategias relacionadas (Reys*, 1986*).

Procesos mentales	Estrategias de cálculo estimativo
Reformulación	Dígito de la izquierda Redondeo Números compatibles
Traducción	Agrupación Números especiales
Compensación	Ajustes

Al sistema de procesamiento de la información, desde el punto de vista de la psicología cognoscitiva, le interesa comprender lo que sucede cuando un individuo recibe un estímulo y da una respuesta derivada de dicho estímulo. Dentro de la metodología del presente estudio, se consideró entrevistar bajo dicha perspectiva a los alumnos que resultaron ser buenos estimadores, para que fueran explicando de viva voz los pasos que seguían para llegar al resultado de los problemas aritméticos que se les presentaron y, de esa manera, cumplir con el objetivo general del trabajo.

Reys *et al.* (1982) observaron las siguientes características en los alumnos que resultaron ser buenos estimadores:

i) Rapidez con que recuerdan resultados básicos para todas las operaciones.
ii) Un buen sentido de cómo es afectado el valor posicional por las diferentes operaciones matemáticas.
iii) Manejo de datos numéricos mentalmente.

iv) Uso rápido y eficiente de cálculos mentales para producir información numérica precisa con la cual formular estimaciones.
v) Habilidad para ajustar una estimación.
vi) Uso de las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva de los números reales.
vii) Selección rápida entre varias estrategias.
viii) Entendimiento del concepto de estimación, lo que permite que el estudiante se sienta cómodo trabajando con cierto error.
ix) Confianza en sí mismo.

Con respecto al problema de la enseñanza-aprendizaje del cálculo mental estimativo en México, a partir de la firma del Acuerdo Nacional para la Modernización de la Educación Básica (ANMEB) que entró en vigor a partir de 1993 en todo el país, el gobierno hizo algunos señalamientos importantes, entre los cuales se sugiere la práctica del cálculo mental en secundaria. Sin embargo, la sugerencia se presenta sólo en algunos temas del programa de matemáticas y no como algo que debe enseñarse y practicarse de manera continua y sistemática. Por su parte, son escasas las investigaciones que puedan respaldar la inclusión de dicho tema en los programas escolares de una manera más seria, en donde se resalte la importancia de su enseñanza para lograr desarrollar en los estudiantes el sentido numérico.

2.3 Estrategias de cálculo estimativo.

En la presente investigación se analizaron los resultados sobre las estrategias de cálculo mental estimativo que utilizan los estudiantes, con base en un estudio de Reys (1986), en el cual destacó que la única estrategia que sí se toma en cuenta en los programas escolares es el redondeo de números y, aunque dicha estrategia es muy importante, no resulta eficiente para la solución de muchos problemas. Hay que señalar que una misma estrategia no es adecuada para todos los problemas, y una característica muy importante para ser buen estimador es saber elegir y usar las estrategias adecuadas para cada problema.

Reys (*op. cit.*) clasificó las estrategias de cálculo estimativo en función de lo que observó en sus investigaciones, pero cabe hacer la aclaración de que puede haber autores que las nombren de manera diferente o que las clasifiquen bajo criterios diversos. A continuación se listan dichas estrategias y posteriormente se explica cada una de ellas:

i) Dígito de la izquierda
ii) Agrupación
iii) Redondeo
iv) Números compatibles
v) Números especiales

Al final de la aplicación de cada estrategia se hacen ajustes para obtener resultados más cercanos a las respuestas exactas.

Estrategia del dígito de la izquierda

Esta estrategia puede ser adaptada para cada una de las cuatro operaciones elementales, sin embargo, se aplica principalmente en la suma. Consiste en centrar la atención en el dígito que se encuentra más a la izquierda del número, pues representa la parte más significativa del mismo. La estrategia se lleva a cabo en dos pasos que se muestran por medio de algunos ejemplos:

Ejemplo 1	**Paso 1**	**Paso 2**	**Resultado exacto**
260 153 + 99 371 528	Se suman las cifras que están más a la izquierda: 2 + 1 + 3 + 5 = 11 y se agregan los ceros correspondientes, por lo tanto, se obtiene 1,100.	Se ajustan las demás cifras tratando de juntar aquellas que sumen aproximadamente 100: 71+ 28 son aproximadamente 100 60 + 53 son aproximadamente 100 99 es aproximadamente 100 son en total 300 +1100= 1 400	1,411

Ejemplo 2	Paso 1	Paso 2	Resultado exacto
628 – 453 =	Se restan las cifras de la izquierda 6 – 4 = 2, por lo tanto son 200.	Se ajustan las demás cifras. En este caso, se observa que el resultado debe ser menos de 200. El resultado final estimado puede ser 170.	175

Ejemplo 3	Paso 1	Paso 2	Resultado exacto
877 x 4 =	Se multiplican las cifras de la izquierda 8 X 4 = 32, por lo tanto son 3200.	Se multiplica el 4 x 77 = 300 aproximadamente. El resultado final estimado es 3500.	3,508

Ejemplo 4	Paso 1	Paso 2	Resultado exacto
32,870 ÷ 6 =	Se estima el 32 ÷ 6 = 5.	Se ajustan las cifras restantes y da 5000.	5,478

Estrategia de agrupación

Esta estrategia es muy utilizada en situaciones de la vida diaria. Se usa cuando un grupo de números están muy cerca de un valor común, puede ser utilizada con números enteros, decimales y fracciones. Un ejemplo es:

Ejemplo	Paso 1	Paso 2	Resultado exacto
92 430 83 658 + 87 199 93 280 94 672 88 390	Se estima el número alrededor del cual están los sumandos del problema. En este caso están alrededor de 90 000.	Se multiplica el valor estimado por la cantidad de números que hay. En este caso es: 6 X 90 000 = 540 000.	539,629

Estrategia de redondeo de números

El redondeo de números es una estrategia muy poderosa y eficiente en el proceso de estimación de resultados. En el proceso, se lleva a cabo el redondeo, luego se opera con él y un tercer paso consiste en ajustar el resultado, dependiendo de si se hizo el redondeo para arriba o para abajo. Esta estrategia es particularmente efectiva con problemas de multiplicación.

Ejemplos:

Ejemplo 1 En el producto 47 X 66= se debe hacer el redondeo hacia arriba 50 X 70 = 3500. El ajuste consistiría en tomar en cuenta que el resultado real es menor que el estimado. (resultado exacto 3,102)

Ejemplo 2 En el producto 82 X 73= se debe redondear hacia abajo 80 X 70 = 5 600. El ajuste consiste en tomar en cuenta que el resultado real es mayor que el estimado (resultado exacto 5,986).

Ejemplo 3 En el producto 22 X 59= el primer término que se debe redondear hacia abajo y el segundo se debe redondear hacia arriba; por lo tanto queda 20 X 60 = 1 200. En este caso no es tan necesario hacer un ajuste, simplemente se queda como 1,200 (resultado exacto 1,298).

Ejemplo 4 En el ejemplo 85 X 36= ambos términos están muy cerca del valor intermedio, por lo que se puede redondear uno hacia arriba y uno hacia abajo y desde este paso se está haciendo el ajuste. El resultado es 80 X 40 = 3 200 (resultado exacto 3,060).

Cada uno de los procedimientos pueden ser elegidos por el usuario de una manera flexible y dependiendo de su habilidad para estimar. Lo que no se debe perder de vista es que la principal finalidad del redondeo es producir números que puedan manejarse más fácilmente.

Estrategia de números compatibles

En esta estrategia el usuario debe observar de manera global todos los números involucrados en el problema y cambiar o redondear cada número para hacerlos compatibles entre ellos. Se deben observar parejas de números que den resultados exactos ya que mentalmente son muy fáciles de operar. Esta estrategia es especialmente efectiva con problemas de división. Ejemplo:

Ejemplo 1	Números compatibles	Números no compatibles
Estimar el cociente 3370 ÷ 7	3500 ÷ 7 3200 ÷ 8 4000 ÷ 8	3000 ÷ 7 3300 ÷ 7 3400 ÷ 8

Con respecto a la suma, es muy conveniente su uso para identificar grupos de números que puedan sumar decenas, centenas, etcétera. Ejemplo:

Ejemplo 2	Procedimiento	Resultado exacto
16 + 54 87 44	Aquí el 16 y el 87 se pueden considerar como 100. El 54 con el 44, también. Por lo tanto el resultado estimado es 200.	201

Estrategia de números especiales

Esta estrategia combina varios puntos de las estrategias antes mencionadas, pero su función principal es observar si los números del problema a resolver son parecidos o muy cercanos a números más fáciles de operar y sustituirlos por ellos. Estos valores especiales pueden ser potencias de diez o fracciones comunes y decimales cercanos a 0.5, 0.24, 0.75 o cualquier entero.

Ejemplo 1

7 / 8 + 12 / 13 =

Se debe pensar que cada número está muy cerca de la unidad, por lo que la suma estimada es 1+1 = 2.

Ejemplo 2

23 / 45 de 720 =

Se debe pensar en que 23 / 45 = está muy cerca de 1 / 2. El problema se reduce a calcular la mitad de 720 que es 360.

Ejemplo 3

9.84% de 816 =

Se observa que 9.84 es muy cercano a 10, por lo que se puede estimar el 10% de 816 = 81.6

Ejemplo 4

436.2 / .98 =

Como .98 es casi 1, el problema se estima como un cociente entre 1 y el resultado es el mismo número, es decir 436.2

Ejemplo 5

24% de 78 =

24% es muy cercano a 25%, que a su vez es igual a ¼, por lo tanto el 24% de 78 se estima como 80 / 4 = 20.

Las estrategias de números compatibles y números especiales ilustran de forma adecuada el concepto de estimación: un proceso donde se piensa la solución de un problema cambiándolo a una forma nueva que cumpla con las características siguientes:

i) obtener una respuesta parecida a la respuesta exacta y

ii) que sea fácil de calcular mentalmente.

2.4 Cálculo escrito y cálculo mental

Se considera que en general existen tres formas de hacer cálculos aritméticos: escritos, con métodos mentales y con algún dispositivo (Levin, 1981). Al cálculo escrito también se le conoce como cálculo de lápiz y papel y a los procedimientos se les llama algoritmos de lápiz y papel. Hazekamp (1986) define al cálculo mental como un tipo de cálculo en donde no se utiliza lápiz ni papel o cualquier otro implemento adicional, sólo procesos mentales. Agrega que muchas situaciones de la vida diaria requieren respuestas exactas, pero para otras es suficiente una respuesta aproximada que pueda estimarse mentalmente. Por lo tanto, existen dos formas de cálculos mentales: exactos y estimados.

Cuando se utiliza algún dispositivo para hacer cálculos, pueden suceder dos cosas: i) que quien maneja el dispositivo lo haga sin poner cuidado y sin reflexionar en lo que está haciendo, o ii) que tenga una idea del resultado que espera, lo cual implica que se trabaja al mismo tiempo haciendo cálculos mentales.

Gómez (1988) hizo una relación de algunas diferencias entre cálculo mental y cálculo escrito, mismas que se muestran en la tabla III.

Tabla III. Principales características del cálculo escrito y del cálculo mental (Gómez, 1988)

Cálculo escrito	**Cálculo mental**
Escribe	De “memoria”
Abreviado	Rápido
Automático	Variable
Simbólico	Flexible
Analítico	Activo
Confiable	Constructivo

Significado de las características del cálculo escrito:

i) Escrito, se refiere a que se utiliza lápiz y papel.
ii) Abreviado, se refiere al hecho de ocultar pasos relacionados con las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva de las operaciones.
iii) Automático, significa que no necesita ser comprendido para ser ejecutado.
iv) Simbólico, se refiere a que se manipulan símbolos sin referencia al mundo real.
v) Analítico, este concepto hace referencia al hecho de que las cifras se manipulan separadamente.
vi) Confiable, debido a que siempre se utiliza el mismo algoritmo para el mismo tipo de ejercicios.

Significado de las características del cálculo mental:

i) De memoria, significa que no se puede usar lápiz ni papel o algún otro dispositivo.
ii) Rápido, aunque no se debe considerar como su principal finalidad, se adquiere dicha destreza si se practica continuamente.
iii) Variable, quiere decir que se pueden seguir diferentes caminos para un mismo problema.
iv) Flexible, se debe entender que se busca sustituir o alterar los datos iniciales para trabajar con otros más cómodos, o más fáciles de calcular.
v) Activo, significa que quien calcula tiene la facilidad de poder elegir la estrategia que va a desarrollar.
vi) Constructivo, se refiere a que las respuestas se van construyendo con resultados parciales, que se resumen después para obtener la respuesta final.

En vista de que el cálculo mental se debe de considerar como exacto o estimado, en el siguiente apartado se presentan las características propias del cálculo estimativo, dado que en la presente investigación se trabajó con dicha forma de cálculo.

2.4.1 Cálculo estimativo y sentido del número

Se entiende por cálculo estimativo al proceso de producir una respuesta suficientemente cercana a una respuesta exacta y que permite tomar decisiones, según sea el caso (Reys, 1986). Trabajar un problema con cálculo estimativo o estimado significa, llevar a cabo operaciones mentales considerando un intervalo de posibles soluciones correctas. Comprender el concepto de estimación permite sentirse cómodo con un cierto error en los resultados.

Cuando se hacen cálculos estimativos se interrelacionan una serie de habilidades y conceptos, a la vez que se desarrolla un mejor sentido del número, debido a una mejor comprensión de la estructura del sistema numérico. Hope y Sherrill (1987) compararon los procedimientos utilizados por estudiantes de secundaria considerados buenos estimadores con quienes no lo son, y señalaron que estos últimos ignoraron las propiedades de los números y trataron de resolver los ejercicios con los procedimientos de lápiz y papel, pero mentalmente.

Según Parra (1994) el aprendizaje en el terreno del cálculo estimativo influye en la capacidad para resolver problemas y mejora la comprensión de las relaciones numéricas, lo cual favorece que los alumnos sean capaces de anticipar una situación y reflexionarla. Asimismo, el trabajo con cálculo estimativo permite que el alumno se dé cuenta de que las matemáticas no son un conocimiento cerrado y totalmente construido.

En 1989 el *NCTM* llegó a un acuerdo que marcó un cambio en los Estados Unidos con respecto a los criterios que deberían de seguirse para enseñar matemáticas. Por ejemplo, preguntas tales como: *¿qué enseñar? ¿cómo enseñar? ¿con qué objetivo y para qué?* fueron eje del debate.

Dicho acuerdo influyó en otros países. En particular, en México también se empezó a trabajar en el mismo sentido y se firmó el documento titulado Acuerdo Nacional para la Modernización de la Educación Básica (ANMEB), donde se planteó un nuevo enfoque para la enseñanza de las matemáticas. Uno de los puntos que incluyó el nuevo enfoque fue la recomendación de la práctica del cálculo mental cuando se abordan temas como números enteros y decimales. Sin embargo, no se menciona claramente en los planes y programas de matemáticas de educación media, que rigen desde 1993, el objetivo real de desarrollar el sentido numérico, y muchas veces sólo se utiliza como una práctica de ejercicios mecánicos. Dos investigaciones que se llevaron a cabo en el país confirman que no se practica el cálculo mental estimativo en las escuelas secundarias (Flores *et al*., 1990; Vázquez, 1994).

De acuerdo con la definición de cálculo mental, éste puede ser entendido de dos formas: aquel que conduce a un cálculo exacto y el que se refiere a la obtención de un resultado aproximado, éste último se aplica en situaciones cotidianas cuando es más apropiado y rápido que el primero (Flores *et al.*, 1990). Usiskin (1986), por ejemplo, señaló algunos casos en donde se utilizan cálculos estimados: i) cuando un valor no se conoce y puede ser forzado a estimarse, como en el caso de predicciones o en economía, ii) en valores que son diferentes cada vez que se miden como en el caso de la temperatura, iii) valores que son diferentes por la imprecisión de los aparatos, iv) cuando hay que marcar márgenes de seguridad al señalar la capacidad de un elevador, v) cuando se tiene que trabajar con números irracionales como el número $\prod$, vi) o bien cuando una estimación lleva a otra estimación, como por ejemplo, al estimar la cantidad de gente que se necesita para una construcción y, a partir de este dato, se calcula el tiempo de terminación de la obra.

Por su parte, Vázquez (1994) señaló que una de las ventajas de utilizar el cálculo mental es que da seguridad al alumno, pues le ayuda a desarrollar habilidades intelectuales, tales como la atención y la concentración. Sin embargo, dicho autor también señala la limitación de los procesos internos del cálculo mental donde se van obteniendo resultados parciales, no son fácilmente visibles, y para efectos de evaluación, el profesor sólo tiene acceso al resultado final, sobre todo en grupos numerosos.

Por otro lado, Burill (1998) llevó a cabo en Estados Unidos una investigación sobre la enseñanza de las matemáticas en los últimos 25 años y sus expectativas para el futuro. Comentó que hace 25 años los estudiantes de educación media difícilmente deseaban llevar más de dos cursos de matemáticas, argumentando que no les gustaban y que no encontraban su utilidad. En dichos años, se trabajó con el enfoque de la matemática moderna que fue un fracaso (Kline, 1976). Sin embargo, en 1997, los resultados de los exámenes nacionales fueron los más altos desde 1972. Tal vez esto se deba al enfoque de "regresar a lo básico" y al gran esfuerzo por mejorar la enseñanza de las matemáticas, que tomó en cuenta las nuevas teorías derivadas de la psicología cognoscitiva.

Actualmente hay una gran inquietud sobre ¿qué se va a enseñar en matemáticas? y ¿cómo se debe preparar a los docentes del futuro?. Al respecto Burill (1998) comentó el caso de una niña de jardín de niños que en su primer día de clases entró al salón y vio a la maestra escribiendo en una máquina de escribir, la niña comentó asombrada: "Oh, miren a la maestra, tiene una computadora sin pantalla." El desarrollo tecnológico avanza rápidamente y los niños se ven influenciados por el mismo. Entonces, ¿qué se puede esperar de una clase de matemáticas donde se sigue enseñando, sin tomar en cuenta que los niños utilizan juegos matemáticos en sus computadoras? Tal vez una parte de la respuesta se relacione con enseñar a los estudiantes matemáticas que desarrollen habilidades de razonamiento en vez de una gran cantidad de conceptos sin sentido. Y ¿cómo lograr dicho desarrollo de habilidades? Puede haber muchos caminos entre los cuales la práctica del cálculo estimativo puede ser una respuesta.

2.5 Investigaciones sobre cálculo estimativo.

En general, antes de 1980 eran pocos los trabajos desarrollados sobre cálculo mental (Sowder, 1992). El cálculo mental en las escuelas, más bien se trabaja de manera mecánica, sin tomar en cuenta la riqueza de estrategias y manejo del número que se desarrolla con una práctica constante del mismo y bajo un enfoque del aprendizaje significativo. Por ejemplo, cuando se enseñan las tablas de multiplicar en las escuelas primarias, los niños las aprenden de memoria, lo cuál es muy importante, porque son herramientas que permiten un avance en el conocimiento de la matemática; es decir, hay conocimientos que tienen que mecanizarse para poder desarrollar posteriormente otros conceptos, ideas, teorías, etcétera.

Sin embargo, aunque los niños aprenden y manejan adecuadamente las operaciones aritméticas, cuando se enfrentan a problemas no se sienten seguros en la forma de aplicarlas; prueba de ello es que muchos estudiantes inmediatamente después de que se les pregunta un problema contestan ¿se suma o se resta? y si no ven un rostro de aprobación del maestro, entonces, cambian de parecer y gritan ¿se multiplica o se divide? Respuestas como la anterior demuestran que, aunque sí hay un dominio de la aritmética, no se sabe aplicar correctamente ni se ha desarrollado toda la riqueza implícita en ella.

De igual modo, en las escuelas se trabaja más con cálculos escritos que con cálculos mentales y mucho menos con cálculos estimados, a pesar de que diariamente se aplican en varias situaciones donde no se cuenta, en ese momento con lápiz y papel ni con una calculadora.

Dichas situaciones llamaron la atención de algunos investigadores y maestros en Estados Unidos. En 1977, el *NCTM* recomendó el desarrollo de habilidades, entre las que incluyó el cálculo estimativo, y en 1980 hizo un llamado para que fuera incluido en la *curricula* escolar.

Un trabajo que consideró las recomendaciones del *NCTM* y desarrolló una importante investigación fue el elaborado en Missouri, Estados Unidos por Reys *et al*. (1982) cuyo objetivo fue identificar y caracterizar las estrategias de cálculo estimativo, así como los procesos cognoscitivos que utilizan los alumnos en las escuelas primarias y secundarias.

Para llevar a cabo su investigación, aplicaron un examen de cálculo estimativo proyectando las preguntas sobre una pantalla y pidiéndole a los estudiantes que contestaran sólo las respuestas en hojas que se les dieron para ese fin, sin escribir las operaciones. El examen lo aplicaron a estudiantes de los grados 7º a 9º y seleccionaron a los mejores estimadores para entrevistarlos.

De las entrevistas identificaron tres procesos cognoscitivos: reformulación, traducción y compensación. Asimismo, se identificaron estrategias que fueron usadas en todos los grados estudiados, como el redondeo. Sin embargo, a menudo los buenos estimadores ignoraron las reglas escolares para redondear y utilizaron números más cómodos para resolver los problemas.

Los investigadores caracterizaron a los buenos estimadores como individuos que además de tener habilidad en el uso de los procesos cognoscitivos identificados, tienen una buena comprensión de hechos básicos, como el valor del número según su posición y las propiedades aritméticas;

tuvieron habilidad en cálculos mentales, seguridad en sí mismos y eran tolerantes al error, usaban una variedad de estrategias y fácilmente las intercambiaban.

La información obtenida sobre los procesos que utilizan los buenos estimadores sirvió para guiar la planeación de una nueva *curricula*, así como investigaciones adicionales, como la que se llevó a cabo en México (Flores, *et al*., 1990) cuyo propósito fue identificar y caracterizar las habilidades de cálculo estimativo y las estrategias utilizadas por estudiantes mexicanos de 5º de primaria y 2º de secundaria, mediante la réplica de investigaciones de Missouri (Reys *et al.*, 1982) y Japón (Reys *et al*., 1991). En el estudio participaron seis escuelas primarias y seis escuelas secundarias del estado de Guanajuato. En dichas escuelas se aplicó un examen de cálculo estimativo para seleccionar a los mejores estimadores y seguir un protocolo de entrevista con dichos estudiantes. Sin embargo, los resultados de las escuelas primarias fueron muy bajos: contestaron bien siete preguntas de un total de 38, por lo que se suspendieron las entrevistas para estos alumnos.

Los estudiantes de secundaria, que fueron buenos estimadores, sí se entrevistaron. Ellos presentaron algunas características que se encontraron también en estudiantes de Estados Unidos y Japón, en lo que se refiere a estrategias y procesos cognoscitivos (Reys *et al.*, 1991). Sin embargo se reportó que el cálculo estimativo no se enseña ni se aprende en las escuelas, por lo que entre las recomendaciones finales se señaló la necesidad de revisar los libros de texto y los programas escolares, así como prestar atención a la preparación de maestros.

Posteriormente, se llevaron a cabo nuevas investigaciones en otras regiones, como la reportada por Reys *et al*., (1993) en Saskatoon, Canadá, en donde las preguntas que motivaron el estudio fueron: ¿cuál es el nivel del manejo del cálculo mental en los grados 2º, 5º, y 7º? ¿qué tipo de cálculos mentales son más fáciles para los estudiantes y cuáles son más difíciles? ¿cuáles cálculos prefieren hacer mentalmente los alumnos de 5º y 7º grados? ¿cuáles problemas prefieren hacer con cálculos escritos o con calculadora?

Para contestar estas preguntas, se aplicó un examen de cálculo mental para 2º grado y uno más amplio para 5º y 7º grados. El examen de 2º grado sólo incluyó sumas y restas, mientras que los exámenes de 5º y 7º incluyeron las cuatro operaciones fundamentales distribuidas en 50 preguntas, 40 de las cuales fueron ejercicios simples y diez fueron problemas con un contexto. Después del examen se les pidió a los estudiantes de 7º grado que contestaran qué tipo de cálculos preferían utilizar en ejercicios como: *36 x 25 =, 70 x 600 =, 1000 x 0.123 =,* calcular el *10% de 750 =, 0.25 x 800 = y ½ + ¾ =.* Las opciones de respuesta que tenían fueron: usar calculadora, usar lápiz y papel o hacerlo mentalmente. El único ejercicio que la mayoría prefirió hacerlo mentalmente fue *70 x 600*; para los demás ejercicios prefirieron los cálculos con lápiz y papel.

Los resultados del examen reportaron un bajo desempeño en cálculo mental en general; sin embargo, los autores sugirieron que antes de pensar en desarrollar el cálculo mental en las escuelas, los maestros deben estar conscientes del verdadero papel que juegan los cálculos alternativos para darles su lugar exacto. Citan el ejemplo de Japón, donde el cálculo mental se enseña en las escuelas desde los primeros años y es visto como parte integral de la enseñanza de las matemáticas; los algoritmos escritos, en cambio, se reservan para cálculos más difíciles.

Una investigación japonesa llevada a cabo en la Universidad de Tsukuba dirigida por Reys *et al*., (1991) tuvo como propósito obtener información de estudiantes y maestros japoneses de los grados 2º, 4º, 6º, y 8º relacionada con cálculo mental. A continuación se citan los principales propósitos de dicho trabajo:

i) Medir la actitud respecto al cálculo mental y al cálculo escrito de los estudiantes y maestros de los grados 4º, 6º, y 8º.

ii) Hacer una encuesta de la clase de cálculos que prefieren hacer mentalmente los estudiantes de 2º, 4º, 6º y 8º grados.

iii) Evaluar el cálculo mental de los estudiantes participantes.

iv) Caracterizar las estrategias de cálculo mental utilizadas por los estudiantes de 4º y 8º grados.

Para llevar a cabo dicha investigación se aplicaron tres instrumentos y una entrevista a los mejores alumnos de 4º y 8º grados. Se trabajó con cuatro escuelas de la ciudad de Tsuchiura, tres primarias y una secundaria, y con un total de 755 alumnos y 22 maestros. Los instrumentos fueron revisados por maestros americanos, australianos y japoneses que tenían la especialidad en matemáticas y se probaron con maestros en general y estudiantes japoneses. Uno de los instrumentos fue el examen de cálculo mental, diseñado para detectar a los mejores alumnos. A la mitad de los grupos estudiados se les presentó primero una parte de dicho examen en forma oral, y después la otra parte en forma visual. A la otra mitad, primero se le presentó una parte en forma visual y luego la parte oral. Ya detectados los mejores calculadores se les aplicó una entrevista personal para detectar las estrategias mentales que utilizaron.

Un segundo instrumento fue presentado a los estudiantes para conocer sus preferencias, donde se les mostraron una serie de ejercicios y se les preguntó ¿yo haría este ejercicio mentalmente? y las posibles respuestas eran sí o no. Con respecto a las actitudes hacia el cálculo mental se les aplicó a los estudiantes un instrumento con 28 afirmaciones para elegir entre tres posibles respuestas: si, no, no estoy seguro(a). El instrumento para los maestros fue de 24 afirmaciones con las mismas opciones de respuesta que el de los estudiantes. Los estudiantes de todos los grados fueron consistentes al preferir los cálculos mentales sobre los escritos.

Un aspecto interesante sobre las entrevistas fue que se les pidió a los estudiantes que utilizaran diferentes estrategias para un mismo problema y, en general, no pudieron hacerlo.

Con respecto al desempeño en cálculo mental, se encontró que fue alto en todos los grados tanto en números enteros como en decimales y fracciones, así como en todos los tipos de operaciones. Sin embargo, el desempeño en los diferentes niveles fue más alto en los grados 2º, 4º, 6º y menor en 8º grado, lo cual indicó que se hace más énfasis en el cálculo mental en la escuela primaria y ya en la secundaria se deja de practicar, haciendo más énfasis en el cálculo escrito.

Tanto las investigaciones de Japón como de otras regiones de Asia, han reportado que estudiantes de Japón y Taiwan tienen niveles altos en matemáticas (Stigler, Lee y Stevenson*,* 1991). Sobre cálculo estimativo se llevó a cabo una investigación en Taiwan (Reys y Yang, 1998), cuya metodología incluyó tres instrumentos: un examen de cálculo escrito y un examen de cálculo estimativo, para comparar el desempeño en ambas formas de cálculos, y una entrevista a los mejores alumnos para estudiar el nivel del sentido numérico que manejaban.

El examen escrito fue de 20 preguntas y el examen mental de 40. Se trabajó con un total de 115 alumnos de 6º grado y con 119 de 8º grado, elegidos entre dos escuelas primarias y dos escuelas secundarias diferentes. El resultado de los exámenes demostró un desempeño más alto en cálculo escrito que en cálculo mental, en ambos grados. En las entrevistas se encontró que los alumnos de los grados superiores tienen un mejor nivel en el manejo de los números. Por ejemplo, cuando se les preguntó ¿cuántos números hay entre 1.42 y 1.43? los estudiantes de 8º grado no tuvieron ninguna dificultad para contestar que hay un número infinito de posibilidades, en cambio los niños de 6º grado creían que sólo había nueve números: 1.421, 1.422, 1423, 1.424, 1.425, 1.426, 1.427, 1.428, 1.429.

Los alumnos taiwaneses en general mostraron un mejor desempeño en cálculos escritos que en cálculos mentales, y un bajo desempeño en el manejo del sentido del número, lo cual confirma la propuesta de McIntosh, Reys y Reys, (1992) acerca de que un alto manejo de habilidades en cálculo escrito no necesariamente va acompañado del sentido del número. En contraste, cuando se ganan habilidades de cálculo mental a través de la reflexión sobre el significado de los números, se desarrolla el sentido del número de mejor forma (Sowder, 1990).

En Estados Unidos, Case (1985; citado en Sowder, 1989), psicólogo educativo, se interesó particularmente en el procesamiento de la información tomando en cuenta el desarrollo intelectual, puso especial énfasis en el papel que juega la memoria durante el aprendizaje y señaló que el espacio de la memoria a corto plazo es más limitado en los niños que en los adultos. Dicho autor propuso una teoría, donde señala que el desarrollo cognoscitivo de los niños se divide en dos etapas durante los años escolares: la etapa dimensional y la etapa vectorial.

La etapa dimensional se da aproximadamente entre los cinco y diez años y se caracteriza por el número de unidades o dimensiones que pueden concentrar a un mismo tiempo los niños. Por ejemplo, *9+5=* es un ejercicio unidimensional porque se trata de números que solo manejan unidades; *18+45=* es un ejercicio bidimensional, porque cada número está compuesto de unidades y decenas. Cuando se integran números con centenas y mayores se pasa a la etapa vectorial, entre los 11 y los 18 años aproximadamente. El cálculo estimativo es un ejemplo de una tarea, la cual se puede pensar que tiene componentes multidimensionales que deben estar coordinados. En el cálculo estimativo, entran en juego la aritmética y la aproximación. El número de dimensiones depende del número de cosas que deben ser recordadas antes de que otro paso deba ser ejecutado.

El autor afirmó que un verdadero entendimiento del cálculo estimativo involucra la ejecución y coordinación de ambos componentes, lo cual sucede hasta que el niño alcanza la etapa vectorial; mientras tanto, las tareas que involucran cada una de las partes pueden ser resueltas durante los primeros años.

Sowder (1989) evaluó el cálculo estimativo en término del número de dimensiones, de acuerdo con la teoría de Case (1985). Trabajó con 12 niños, aplicando reactivos correspondientes tanto a las etapas dimensional y vectorial, como a la edad, y los entrevistó para que explicaran como habían resuelto los ejercicios. Todos pudieron contestar al menos la mitad de los reactivos. También se les dieron ejercicios que correspondían a una etapa superior, pero no fueron resueltos con éxito, resolviendo menos de la mitad de la tarea. Ninguno de los niños había recibido instrucción formal sobre el tipo de trabajo que se les aplicó. En todas las instancias, los problemas que el autor propuso como apropiados para cada grado en particular, probaron que efectivamente lo eran. Con la investigación descrita, Sowder (*op. cit*.) apoyó la hipótesis de Case, acerca de que el cálculo estimativo es una habilidad de pensamiento de alto orden que requiere muchas decisiones del estimador, y concluyó que desarrolla el sentido numérico.

En otra investigación, Sowder (1994) señaló que si se toma con seriedad la declaración del *NCTM* (1989), referente a desarrollar el sentido del número en la educación básica en matemáticas, se puede cambiar la forma en que algunos maestros la enseñan. Asimismo afirmó que cada vez se llevan a cabo más investigaciones que documentan ejemplos de salones de clases sobre el aprendizaje del cálculo estimativo y el sentido del número. Un ejemplo de dichas investigaciones fue la realizada por Weber (1996) de la Universidad de Toledo, con alumnos de 8º grado y seis profesores de matemáticas que aplicaron el material didáctico desarrollado por el autor en sus clases, mediante un estudio experimental que incluyó un *pretest* y un *postest* con grupo control. Los dos grupos de alumnos fueron elegidos de una escuela pública. Dicho autor afirmó que los niños empiezan la escuela formal teniendo habilidades para hacer algunos cálculos mentales. Los niños inventan dichos procedimientos basados en su entendimiento intuitivo de número y cantidad, los cuáles adquieren a través de su exploración del medio y de trabajar con objetos concretos en sus juegos (Carpenter, Hiebert y Moser, 1981; Carpenter y Moser, 1984). Sin embargo, cuando la instrucción formal en matemáticas empieza en las escuelas, a menudo aparecen algunos problemas, debido a que la instrucción se basa en el manejo de símbolos escritos y en la memorización de procedimientos que no están relacionados con el conocimiento conceptual de números y cantidades.

La investigación de Weber (1996) consistió en determinar el efecto de materiales didácticos que desarrollen el concepto de número y conecten dicho concepto a los procedimientos de cálculo mental. Dicho autor desarrolló material didáctico, el cual estuvo integrado por tres instrumentos y 83 lecciones de cálculo mental, que impartieron los maestros de matemáticas al grupo experimental, desde septiembre de 1993 hasta mayo de 1994. Los tres instrumentos que aplicó se detallan en los siguientes párrafos.

i) **Examen de cálculo mental**. Se aplicó antes y después de recibir las lecciones. Los exámenes estaban impresos y solamente se escribían las respuestas. Los objetivos que se persiguieron fueron los correspondientes a los objetivos y metas en educación matemática del estado de Michigan. Se calculó la media estadística y un análisis de covarianza a los resultados de los exámenes para determinar cambios significativos en el grupo experimental, mostrando un cambio positivo para el grupo experimental mientras que el grupo control se mantuvo estable.

ii) **Instrumento para elegir un método para calcular**. Fue el mismo examen de cálculo mental, pero en vez de incluir las respuestas de los ejercicios, se les pedía que contestaran qué método preferían utilizar en cada reactivo: cálculo mental, cálculo escrito o calculadora. Se aplicó un *pretest*, en el cual se mostró que no existía una preferencia marcada por utilizar cálculos mentales en ambos grupos, pero en la aplicación del *postest*, en el grupo experimental sí hubo personas que los eligieron.

iii) **Entrevistas**. Se eligieron aleatoriamente 12 alumnos y se les aplicó una *pre* entrevista y una *post* entrevista, donde se les pedía que explicaran como resolvían sus ejercicios. Las entrevistas se grabaron en cinta magnética y se tomaron notas de las explicaciones, opiniones y otras reacciones que no se podían detectar en la grabación. Durante el análisis de las entrevistas se mostraron muy pocos cambios en los procedimientos de cálculo mental que usaron los estudiantes. Una posible explicación de los anterior es que los procedimientos aprendidos en las escuelas están muy arraigados y los usan automáticamente. Sólo un estudiante cambió totalmente sus estrategias para calcular la suma *276+38=.* En la *pre* entrevista explicó:

> "el resultado es trescientos catorce, sume seis más ocho y son catorce, entonces llevo una. Ocho más tres es once y llevo una. Dos más una que llevo son tres".

El mismo alumno explicó en la *post* entrevista:

> "son trescientos catorce. Yo sé que dejo el dos sólo y luego le añado el tres al siete y me da trescientos, y ocho más seis son catorce."

Para otros alumnos hubo cambios, pero sólo en uno o dos ejercicios. Como conclusión de la investigación de Weber (1996) se señaló que las lecciones que recibieron los alumnos les ayudaron a construir relaciones entre los números, que se conectan con el entendimiento de procedimientos de cálculo mental, especialmente con números decimales, fracciones y porcentajes. Con números enteros, la tendencia fue utilizar cálculos escritos. Su recomendación fue que los maestros deberían considerar el cálculo mental como un componente del curriculum total de matemáticas.

En contraste con las investigaciones que se centran en las habilidades de cálculo estimativo de los niños, Forrester y Pike (1998) examinaron las ideas alrededor de la enseñanza y aprendizaje del cálculo estimativo en el salón de clases, empleando etnometodología, con niños de nueve y 11 años. Se analizaron las conversaciones centradas en la instrucción que impartieron dos maestros durante las lecciones sobre estimación. Asimismo, se analizaron las pláticas sostenidas por los alumnos, sobre dicho tema, cuando trabajaron en equipos. Los autores fijaron su atención, tanto en los ejercicios aritméticos como en los de mediciones.

La intención de la investigación fue descubrir los modelos implícitos en las discusiones y actividades del salón de clases cuando se está pensando y practicando la estimación. Las actividades incluyeron las lecciones formales de los maestros al introducir el tema y la subsecuente discusión entre los niños cuando se les encargan tareas de estimación. El estudio se llevó a cabo en dos escuelas primarias de la ciudad de Kent, Estados Unidos. Se eligió un grupo de 6º grado con 22 alumnos del género masculino, a cargo de una maestra (MA) y un grupo mixto de 5º grado con 30 alumnos a cargo de un maestro (MB). Se estableció una entrevista previa con los docentes, quienes indicaron que no seguían ningún método especial para la enseñanza del cálculo estimativo; sólo utilizaban los materiales del *curriculum* que incorporan problemas de estimación. Las lecciones fueron registradas en cinta de video y se observaron tres clases de cada maestro. A los niños sólo se les dijo que había un interés por conocer sus habilidades en cálculo estimativo.

Todas las grabaciones fueron transcritas, utilizando la notación del sistema de Psathas (1990; citado en Forrester y Pike, 1998) (ver tabla IV). Se hicieron comparaciones de las transcripciones analizando todos los desacuerdos o ambigüedades. En algunos casos se anotaron acciones relevantes o sobresalientes llevadas a cabo por los participantes.

Tabla IV. Notación del sistema de Psathas para transcripciones (tomado de Forrester y Pike, 1998).

Símbolo	Explicación
🡅 🡇	Subir o bajar el tono
Subrayar	Para enfatizar expresiones
:::	Indica sonidos que se extendieron
([ ])	Interrupciones o pláticas simultáneas
(°)	Pequeñas pausas
(1.4)	Silencios, con el tiempo en segundos
°	Muestra que un pasaje de la platica fue muy calmado comparado con el resto
=	No hubo espacio entre dos expresiones
Mayúsculas	Indican que se subió el volumen

Ejemplo de una pequeña parte de una transcripción:

1. MA: Vamos a 🡅 hacer un trabajo (°) sobre 🡅 mediciones (°) 🡅 empezaremos con un área y un perímetro =. Lo que quie:::ro hacer es continuar con un nue:::vo trabajo, pero vamos a 🡅 empezar con algo que debe ser familiar para 🡅 ustedes.
2. MA: es por <u>eso</u> que necesitan su libro de 🡅 ejercicios.
3. MA: para <u>empezar</u> (°) van a hacer (°) algo de Estimación (°). Por lo tanto, 🡅 en su libro van a hacer (°) una mar:::ca, 🡅 la cual pueden escribir arriba °cerca° de la 🡅 tarea (2.0).

Los autores señalaron que en el ejemplo anterior se ve claramente como las palabras medición y estimación sobresalen del resto de la plática, a través de pausas, énfasis o cambios en el volumen de voz. Asimismo se nota la organización del trabajo en frases como: vamos a ↑ hacer, ↑ empezaremos con, (°) van a hacer (°).

Los autores concluyeron que la estimación estuvo de acuerdo con la discusión del pensamiento aproximado, vago e inexacto. Se asoció con prácticas de adivinación y, lo más importante, es que no se siguieron reglas ni se requirieron respuestas exactas. En contraste, cuando se habló de mediciones, se relacionó a éstas con lo real, lo correcto, lo exacto y donde hay que seguir reglas. Los alumnos no pudieron comprender que hay mediciones que también se pueden estimar. Finalmente, hubo una pequeña orientación con la idea de caracterizar la estimación como un concepto.

Forrester y Pike (1998) centraron su investigación en el salón de clases para comprender cómo piensan los maestros y cómo aprenden los alumnos a estimar, buscando métodos alternativos de investigación. La psicología cognoscitiva también ha buscado otras alternativas que se separan un poco de los métodos 100% cuantitativos, empezando por definir el aprendizaje desde la perspectiva del conocimiento usado en la práctica, entendida como un conjunto culturalmente organizado de actividades significativas con su propio sistema tecnológico y simbólico (Silver, 1990). De acuerdo a lo anterior, el contexto juega un papel importante en la adquisición de un nuevo conocimiento.

Silver (*op. cit.*) se propuso identificar algunas formulaciones teóricas potencialmente fructíferas para investigar algunas alternativas a los cálculos de lápiz y papel, tales como la estimación y el cálculo mental exacto.

Como el área de trabajo de dicho autor ha sido la solución de problemas matemáticos, él mismo aclara que está polarizado hacia la consideración del uso de procesos matemáticos en situaciones problemáticas. Bajo esa perspectiva sugiere que aunque la aritmética mental y las estimaciones se puedan estudiar como procesos descontextualizados y descompuestos, mucho se ganaría si se hicieran a un lado dichas suposiciones y se trataran como procesos situados en un contexto determinado. Lo anterior puede ayudar a entender ciertos errores y fallas de los estudiantes, así como servir de apoyo en el diseño de investigaciones e instrucciones para desarrollar un proceso más sólido de estimación y cálculo mental.

Silver (1990) realizó un estudio para estimar el desempeño académico de 12 alumnos de secundaria. Para ello, se aplicaron problemas de división con residuo. Los estudiantes fueron entrevistados y sugirieron que dicho examen se hiciera con respuestas de opción múltiple, porque era la forma en que estaban acostumbrados a contestar exámenes. Sin embargo, en sus respuestas orales, los sustentantes fueron capaces de ofrecer interpretaciones interesantes de sus respuestas numéricas. Lo mismo sucedió en una extensión del mismo estudio, aplicado a 200 estudiantes de secundaria. Cuando se les preguntó a los maestros que habían aplicado los exámenes sobre las dificultades que enfrentaron durante la actividad, ellos revelaron que muchos alumnos discutieron los problemas y propusieron soluciones alternas antes de plasmar sus respuestas en el papel. Dichas discusiones, aparentemente ricas en razonamientos, no pudieron ser analizadas por los investigadores porque los estudiantes no creyeron que sus interpretaciones fueran apropiadas para incluirse en un trabajo de matemáticas. Finalmente, Silver (*op.cit.*) puntualizó que la estimación y el cálculo mental exacto deben ser vistos como componentes de un constructo más general llamado sentido del número.

En la actualidad hay una seria tendencia en los programas de matemáticas de algunos países industrializados por enfatizar el desarrollo del sentido numérico, y al mismo tiempo se ha establecido una comunicación entre investigadores de dichos países para tratar de ayudar a maestros y alumnos a lograr esa meta. En Australia, Suecia, Taiwan y Estados Unidos se ha trabajado en investigaciones cuyo interés es el sentido del número y han desarrollado un marco teórico para evaluarlo en alumnos de ocho a 14 años (Reys *et al*., 1999). Los objetivos perseguidos en dichos trabajos fueron: i) brindar a los docentes una herramienta para evaluar el sentido del número de sus alumnos, como una base para tomar decisiones de adecuar acciones curriculares y ii) dar una herramienta a los investigadores para entender mejor las nociones de sentido del número de los estudiantes.

Desarrollar el sentido del número es importante porque involucra relaciones múltiples entre conceptos matemáticos, hechos y habilidades a los que se tiene acceso cuando se necesitan (Ekenstam, 1977). Para quienes no lo desarrollan, las matemáticas son un conjunto de hechos aislados, desconectados y de fórmulas que se deben memorizar y practicar.

Los investigadores de los cuatro países mencionados revisaron y analizaron los componentes del sentido de número, y coincidieron en que muchas características del mismo se reflejan en cálculos mentales y de estimación. Derivado de la revisión de la literatura, se identificaron los temas comunes, los cuales se organizaron en tres categorías amplias: i) conocimiento del número y facilidad de manejo del mismo, ii) conocimiento y facilidad para el manejo de las operaciones, iii) aplicación del conocimiento de los números y de las operaciones en situaciones de cálculo. De la clasificación anterior se determinaron seis componentes principales, dos para cada categoría:

i) Entendimiento del significado y tamaño del número.
ii) Entendimiento y uso de representaciones equivalentes de números.
iii) Entendimiento del significado y efecto de las operaciones.
iv) Entendimiento y uso de expresiones equivalentes.
v) Cálculos flexibles y estrategias de cálculo mental.
vi) Cálculo escrito y uso de la calculadora.

En los cuatro países se construyeron reactivos. Los primeros se utilizaron con estudiantes de Estados Unidos en pruebas piloto. A cada ejercicio se le asoció con un componente del sentido del número para asegurar la validez de la prueba, y sólo se aceptaron aquellos donde todos los investigadores estuvieron de acuerdo en que representaba el mismo componente. En cada país se utilizaron diferentes formas de pruebas y el número de reactivos varió de 30 a 45, dependiendo del grado escolar.

Para la administración de las pruebas, se leyeron las instrucciones y se les pidió que emplearan entre 30 a 45 segundos por reactivo. A los niños de ocho años se les leyeron los ejercicios y a los demás se les fueron pasando de uno en uno, recordándoles constantemente el número de reactivo que deberían estar contestando en ese momento.

Los resultados del examen abarcaron un amplio intervalo de desempeño para la muestra empleada; es decir, los niveles de desempeño variaron en ocasiones en forma importante entre los cuatro países.

Por las diferencias entre los países involucrados en la investigación, la discusión se centró en cómo se contestaron individualmente los reactivos en lugar de la prueba como un todo. Cabe aclarar que el estudio no se hizo para hacer generalizaciones ni comparaciones internacionales. Sin embargo, como en general el desempeño de los alumnos fue bajo, se consideró que era conveniente que hubiera un acuerdo internacional para desarrollar el sentido del número.

Las investigaciones señaladas en el presente capítulo, trabajaron con niños y jóvenes en edad escolar, desde los primeros grados de primaria hasta la secundaria. La mayoría centraron su atención en detectar a los buenos calculadores para identificar las estrategias que utilizan, los procesos de pensamiento, el grado de desarrollo del sentido del número, y todo aquello que pudiera servir para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Una investigación que tuvo un objetivo parecido fue la desarrollada por Dowker (1992) en la Universidad de Oxford, Inglaterra, pero con la diferencia de que trabajó con matemáticos profesionales. El propósito de su estudio fue entender de manera más amplia el sentido del número y su relación con la estimación, al investigar las estrategias de estimación que utilizan las personas con un conocimiento profesional y experiencia e interés en las propiedades y relaciones entre los números.

Tomaron parte en el trabajo 44 matemáticos puros, desde estudiantes de doctorado, hasta quienes pertenecían a alguna sociedad o institución de profesionistas. De la muestra, 39 fueron hombres y cinco mujeres; 22 recibieron su educación elemental en Inglaterra y siete en Estados Unidos. La tarea fue hacer cálculos estimativos de diez multiplicaciones y diez divisiones que involucraban números enteros y decimales. Los reactivos se les mostraron uno a la vez y en forma aleatoria. Se les presentaron en forma escrita y leídos en voz alta. No hubo límite de tiempo, pero tenían que decir en voz alta sus pensamientos mientras estimaban. Se les advirtió que el interés principal era observar las estrategias que utilizaban sin importar si eran buenos para estimar. Las respuestas fueron registradas en cinta magnética.

Se utilizó el sistema de Levine (1982; citado en Dowker, 1992) para medir la exactitud de las estimaciones en donde se consideraron: i) tres puntos si la estimación no se alejó más del 10% de la respuesta exacta, ii) dos puntos si el porcentaje de error fue mayor del 10%, pero menor del 20% de la respuesta exacta, iii) un punto si la estimación tuvo un error mayor del 20% pero menor del 30%, iv) cero puntos si el error de la estimación fue mayor del 30%.

A 18 de los 44 matemáticos se les volvió a aplicar la misma tarea, después de un intervalo de seis a nueve meses, para comparar sus estrategias con las utilizadas la vez anterior. En los resultados de la investigación se reportó que la mayoría de los matemáticos utilizaron de 15 a 20 minutos para terminar la tarea. La calificación media fue de 51.45 aciertos de un total de 60, con una desviación estándar de 6.57. Aunque hubo una fuerte tendencia a aplicar determinadas estrategias, no hubo problemas para los cuales se aplicaran menos de tres estrategias diferentes.

De los resultados de la segunda aplicación, los 18 matemáticos que participaron utilizaron estrategias diferentes en las dos ocasiones, lo cual demuestra que una de las características del cálculo estimativo es su flexibilidad.

El desempeño de la estimación de los matemáticos incluyó características como: un alto nivel de exactitud con errores ocasionales, una tendencia a usar estrategias involucrando conocimiento de propiedades aritméticas y relaciones, así como una gran diversidad y flexibilidad en cuanto a las estrategias usadas. Tendieron a utilizar estrategias que involucraban el entendimiento de las propiedades aritméticas y las relaciones más que las estrategias que contienen el uso de técnicas enseñadas en la escuela. Las respuestas, sin embargo, no estuvieron exentas de error ya que únicamente 11 de los 60 trabajos tuvieron la máxima calificación. Los errores más frecuentes ocurrieron al hacer ajustes con el punto decimal; muy raras veces por usar estrategias incorrectas. En general se encontró que uno de cada cinco matemáticos del estudio cometieron al menos un error. Cuando se les pidió que escribieran algo sobre la naturaleza de su propio pensamiento matemático, enfatizaron que el evitar tales errores no era su primera prioridad.

Otro resultado sobresaliente es que los matemáticos parecieron verdaderamente atraídos por un punto de vista estético, así como por un punto de vista práctico, en el sentido de trabajar con números agradables, según ellos mismos los nombraron, no tanto por buscar las soluciones de los ejercicios.

Aunque los matemáticos puros fueron considerados como los expertos de las propiedades de los números y sus relaciones, ellos en efecto, pocas veces hacen ejercicios de cálculos en sus trabajos. Como conclusión de la investigación descrita, se señaló que sería interesante comparar el desempeño de los matemáticos con personas cuyo trabajo requiere más frecuentemente el uso de cálculos, pero menos conocimiento explícito de las propiedades de los números que el de los matemáticos (contadores, negociantes financieros, algunos tipos de ingenieros, mercaderes, quienes hacen estadísticas, etcétera).

Se puede decir que una investigación que, hasta cierto punto, puede dar una respuesta a la propuesta anterior fue la realizada en el CINVESTAV por Vázquez (1994), debido a las características de la población considerada en el estudio. Dicho autor trabajó en tres escuelas primarias y en tres escuelas secundarias, con 30 niños de 6º grado de primaria y 30 jóvenes de 1º de secundaria en una zona suburbana perteneciente al Estado de México. El propósito de su trabajo fue explorar y determinar las habilidades de cálculo mental que tienen dichos estudiantes. La población estudiada, se caracterizó por pertenecer a familias de escasos recursos, en donde tienen que contribuir al ingreso familiar, por lo que la mayoría de los alumnos trabajan por las tardes en comercios ambulantes o semifijos. Lo anterior propició que los estudiantes estuvieran en contacto con el manejo del dinero desde pequeños, dicha situación les proporcionó un desarrollo de habilidades de cálculo mental en un contexto real, y como sugirió Silver (1990) fue más significativo el aprendizaje del mismo. Las edades de los jóvenes fueron de 11 a 16 años quienes, según la teoría de Case (1985; citado en Sowder, 1989), pertenecen a la etapa vectorial y es cuando se puede comprender verdaderamente el cálculo estimativo.

Vázquez (1994) aplicó un examen de cálculo mental para detectar a los alumnos exitosos y posteriormente entrevistarlos. El examen constó de 29 ejercicios y se dividió en dos bloques, el primero con 20 operaciones aritméticas puras y el segundo con nueve problemas dentro de un contexto. En el primer bloque, tomando en cuenta todos los exámenes aplicados, se contestaron correctamente el 62.3% de las preguntas, mientras que en el segundo bloque el 63.5%. Hubo un alumno que contestó todo el examen bien, es decir obtuvo 29 aciertos. Después de calificar los exámenes, se seleccionaron 17 alumnos para ser entrevistados; aquellos que obtuvieron entre 20 y 29 aciertos y dos que obtuvieron entre 16 y 14 aciertos, para comparar sus respuestas con los anteriores.

Al hacer el análisis de las respuestas dadas en el examen de cálculo mental se pudo notar que los estudiantes combinaron estrategias de lápiz y papel con estrategias de cálculo mental, en una proporción del 53% para lápiz y papel y 47% para cálculo mental. En las entrevistas de secundaria dichos porcentajes fueron: 57% para estrategias de lápiz y papel y 43% para cálculo mental. Cuando se usaron estrategias escritas, los alumnos cometieron más errores, que cuando sólo usaron la mente.

Aunque la intención inicial no fue elegir una muestra de estudiantes con experiencia en el comercio, los resultados del estudio confirmaron que los niños que tienen dichas características, conocen y aplican correctamente procedimientos de cálculo mental para resolver problemas aritméticos.

Las recomendaciones de la investigación de Vázquez (1994) señalaron que se debe construir una teoría sobre los procesos cognitivos involucrados en el cálculo mental, así como afinar una clasificación general de estrategias exitosas. Futuros trabajos deben dirigirse a identificar el perfil del buen calculador mental, estudiar si el cálculo mental brinda seguridad psicológica a los estudiantes y si ayuda a desarrollar factores intelectuales como la atención, la concentración y el interés sobre el trabajo, entre otros.

Lo que no debe perderse de vista es que en general las investigaciones relacionadas con el cálculo mental y estimativo, coinciden en la importancia que tiene para desarrollar el sentido del número en los estudiantes.

3. METODOLOGÍA

La metodología utilizada en la investigación se presenta bajo los enfoques cuantitativo y cualitativo dependiendo del instrumento utilizado. A continuación se describen los sujetos de estudio, el contexto en el cual se trabajó, los instrumentos y procedimientos de aplicación y finalmente la forma como se analizaron los resultados.

3.1 Sujetos

La investigación se llevó a cabo en la ciudad de Ensenada, Baja California, durante el ciclo escolar 1998-1999, período en el cual contaba con 68 secundarias, clasificadas de la siguiente forma:

i) 37 secundarias generales: 18 urbanas y 19 rurales. Del total, 27 son del gobierno y diez son colegios particulares.

ii) 13 secundarias técnicas del gobierno: siete son urbanas y seis rurales.

iii) 18 telesecundarias del gobierno: 16 rurales y dos en las orillas de la ciudad.

Tomando en cuenta la clasificación anterior, se consideraron las siguientes características para elegir la muestra:

i) Régimen administrativo de las escuelas: de gobierno y particular.

ii) Tipos de escuelas: generales, técnicas y telesecundarias.

iii) Localización geográfica: rural, urbana y urbana situada en las orillas de la ciudad.

Con base en las consideraciones anteriores, se utilizó un tipo de muestreo estratificado, donde se incluyeron ocho escuelas diferentes, que abarcaron todas las modalidades de secundarias con que cuenta la región. A su vez, se eligió un grupo de cada una de dichas escuelas para conformar una muestra de 248 estudiantes de 2º grado de secundaria, cuyas edades variaron de 12 a 16 años.

3.2 Instrumentos

Se utilizaron dos instrumentos: un examen de cálculo mental estimativo para seleccionar a los mejores estimadores, y una entrevista que se aplicó a los estudiantes elegidos. Tanto el examen estimativo como la entrevista, se basaron en los instrumentos que se aplicaron en las instituciones que se mencionan a continuación, previa autorización de los autores: en la Universidad de Missouri, (Reys *et al*., 1982) y en el Centro de Investigación en Matemáticas en Guanajuato, (Flores *et al*., 1990). Los autores proporcionaron una copia de los ejercicios, instrucciones y sugerencias de aplicación que se utilizaron en ambas investigaciones.

3.2.1 Examen estimativo

El propósito del examen estimativo fue seleccionar a los alumnos que contestaron mejor los ejercicios mentales estimativos, para posteriormente entrevistarlos y observar la manera cómo resuelven dichos ejercicios; es decir, detectar las estrategias y procesos utilizados.

El examen estimativo constó de 39 reactivos de respuesta abierta, 14 inmersos en un contexto de la vida real y 25 fueron ejercicios puramente numéricos. Asimismo, se incluyeron cinco preguntas al final del examen, para detectar qué concepto tenían los alumnos de sí mismos como estimadores y el uso que hacían de la calculadora.

Aunque los ejercicios y problemas se tomaron de las investigaciones mencionadas, se hicieron algunas modificaciones en los ejercicios contextuales para adecuarlos al medio donde se llevó a cabo la presente investigación. Para realizar dichos cambios, se considero el medio en donde vivían los estudiantes para que se sintieran familiarizados con los contextos.

En el examen se incluyeron reactivos con las cuatro operaciones aritméticas elementales, y con números enteros, decimales, fracciones y porcentajes. Como el examen requería respuestas aproximadas, los resultados podían variar un poco, pero ser igualmente correctas. Para resolver lo anterior, se consideraron intervalos de respuestas aceptables, después de analizar cada una de las preguntas (ver tabla V). En todos los casos, los intervalos incluyeron la respuesta exacta.

Al final del examen estimativo se agregaron cinco preguntas para analizar diferentes aspectos. La primera pregunta tuvo la finalidad de observar la percepción que tenían los alumnos de sí mismos como estimadores: ¿eres buen estimador? La segunda, para determinar la importancia que le dan al cálculo estimativo: ¿crees que estimar es importante? El resto de las preguntas, para saber si usan la calculadora: ¿tienes calculadora en tu casa?, ¿te dejan usar calculadora en la escuela?, ¿usas la calculadora regularmente? Lo anterior con la finalidad de que reflexionaran sobre la importancia de hacer estimaciones y de saber utilizar la calculadora.

Tabla V. Preguntas del examen estimativo, donde se señalan las respuestas exactas y los intervalos de respuestas estimadas aceptables, propuestos por Reys *et al.*, (1982).

No. Reactivo	Ejercicios Numéricos	Intervalos aceptables	Respuestas exactas
1 (n, +, +, e)	89 + 382 + 706	(1,160 - 1,190)	1,177
2 (n, -, e)	7, 465 – 572	(6,800 - 7,000)	6,893
3 (n, -, e)	37 689 – 18 812	(17,000 - 20,000)	18,877
4 (n, x, e)	28 x 47	(1,200 - 1,500)	1,316
5 (n, x, e)	6, 809 x 91	(540,000 - 630,000)	619,619
6 (n, x, x, e)	31 x 68 x 298	(540,000 - 630,000)	628,184
7 (n, ÷, e)	713 ÷ 8	(70 – 100)	89.125...
8 (n, ÷, e)	474, 257 ÷ 8 127	(50 – 60)	58.35...
9 (n, ÷, e)	22 ÷ 72	(0.2 - 0.4)	0.305...
10 (n, x, ÷, e)	(347 x 6) ÷ 43	(45 – 60)	48.41...
11 (n, +, +, d)	0.7 + 0.002 + 0.81	(1 - 2)	1.512
12 (n, x, d, e)	486 x 0.24	(100 - 150)	116.64
13 (n, ÷, d, e)	289 ÷ 71.8	(4 - 5)	4.02...
14 (n, -, d, e)	308 – 2.85	(305 - 306)	305.15
15 (n, -, d)	835.67 – 0.526	(835 - 836)	835.144
16 (n, x, f, d)	1 ½ x 1.67	(2 - 3)	2.505
17 (n, x, x, f, d, e)	$1\,{}^{7}/_{8}$ x 1.19 x 4	(6 - 10)	8.925
18 (n, x, d)	6.31 x 0.8	(4.8 - 6)	5.048
19 (n, x, d)	98.6 x 0.041	(3.5 - 4.1)	4.0426
20 (n, x, x, d)	5.1 x 4.8 x 6.3	(120 - 160)	154.224
21 (n, ÷, d, e)	648 ÷ 1.06	(600 - 648)	611.32...
22 (n, ÷, d)	7 029.6 ÷ 0.95	(7,000 - 8,000)	7399.57...
23 (n, +, f)	12/13 + 7/8	(1.5 - 2)	83/104 o 1.79...
24 (n, x, f, e)	(21/23) x 149	(130 - 149)	$136\,{}^{1}/_{23}$ o 136.04
25 (n, -, f)	($2\,{}^{2}/_{5}$) – ($2\,{}^{7}/_{8}$)	(0.5 - 1)	96/115 o 0.834
Subtotal 25	**Ejercicios Contextuales**		
26 (c, x, d, e)	Con una lata de pintura se cubren 7.47 m^2 de superficie. ¿Cómo cuántos m^2 se cubren con 4 latas aproximadamente?	(28 - 32)	29.88
27 (c, x, d, e)	¿Cómo cuánto gastará Esmeralda en 3.5 m de tela si el m cuesta $23.00?	(69 - 100)	80.5
28 (c, x, e)	En una maquiladora pagan $238.00 diarios en el turno nocturno. ¿Cómo cuánto ganará un empleado por semana?	(1400 - 1750)	1,666
29 (c, -, e)	Para un concierto de rock había 12,367 boletos, pero por lluvia sólo se vendieron 3,788 ¿Cómo cuántos boletos se quedaron sin vender?	(8,000 - 9,000)	8,579
30 (c, x, e)	Los alumnos necesitan dinero para el grupo que amenizará su fiesta de graduación, cada alumno debe cooperar con $92.00 y son 46 alumnos ¿Cómo cuánto les cobra el grupo?	(3,600 – 4,600)	4,232
31 (c, +, +, e)	Juanito puso un banco de 99 cm sobre otro de 39 cm y encima una silla de 37 cm, para alcanzar unos dulces de la alacena ¿Cómo cuánta altura ganó con su peligroso arreglo?	(160 - 200)	175
32 (c, +, +, +, +, e)	Esta es una cuenta del mercado que aun no ha sido sumada ¿Cómo cuánto es el total? 488 + 487 + 506 + 497 + 512 =	(2,400 - 2,600)	2,490
33 (c, x, e)	¿Cómo cuánta área tiene este rectángulo? (28 x 47)	(1,200 - 1,500)	1,316
34 (c, -, e)	Una casa del fraccionamiento Villas del Real cuesta $117,450.00, si los papás de Claudia compraron una y dieron de enganche $44,900.00 ¿Cómo cuánto les falta por pagar?	(70,000 - 80,000)	72,550
35 (c, x, d, e)	En el recreo se vendieron 24 tortas de $5.40 cada una ¿Cómo cuánto se ganó?	(120 - 150)	129.6
36 (c, ÷, e)	Un grupo de 48 alumnos cooperó para la compra de un microscopio, si todos aportaron la misma cantidad y se juntaron $1,322.00 ¿Cómo cuánto dio cada uno?	(20 - 30)	27.54...
37 (c, ÷, e)	Para la construcción de un salón se pide la cooperación a los 12 grupos de una escuela, la cantidad a recaudar es de $26,400 ¿Cómo cuánto tiene que dar cada grupo?	(2,000 - 2,400)	2,200
38 (c, ÷, d)	La sociedad de padres de familia de una escuela, donó 15.75 m^2 de tela para hacer cortinas. Si para cada ventana se necesitan 0.95 m^2 ¿Cómo cuántas cortinas saldrán?	(15 - 18)	16.57...
39 (c, x, e)	¿Cuántos días has vivido aproximadamente?	(4,383 - 5,844)	variable
Subtotal 14	n: ejercicios numéricos c: ejercicios contextuales		
Total 39	d: números decimales e: números enteros f: fracciones + suma - resta x multiplicación ÷ división		

3.2.2 Entrevistas

El propósito de las entrevistas fue detectar y clasificar las estrategias de cálculo mental estimativo y los procesos mentales, que utilizan los alumnos que fueron seleccionados como los mejores estimadores. En las entrevistas se incluyó un diálogo de presentación y acercamiento con los alumnos, que a la vez sirvió para explicarles el objetivo y el procedimiento para llevar a cabo el trabajo que se les iba a presentar.

Las entrevistas consistieron en mostrar al alumno diez reactivos: cuatro de ellos fueron operaciones directas; es decir, sólo con datos numéricos, y seis fueron problemas inmersos en un contexto real. Cinco de los reactivos se tomaron del examen estimativo y el resto fueron nuevos. Cada estudiante tenía que hacer los cálculos mentalmente en forma estimada e ir explicando en voz alta los pasos que siguió para llegar al resultado (ver anexo B).

Se consideraron como buenos estimadores a los alumnos que contestaron entre 25 y 20 aciertos, debido a que el mayor número de aciertos que obtuvieron fue de 25, y que después de 20 aciertos bajaron mucho las calificaciones. Las entrevistas fueron registradas en cintas de video y se transcribieron íntegramente, de acuerdo con el procedimiento desarrollado por Martínez (1998), que se describe al final del capítulo.

El análisis de las entrevistas se llevó a cabo a través de dichas transcripciones, en las cuales se identificaron y categorizaron las estrategias que usaron los estudiantes, así como los procesos mentales que emplearon para resolver los ejercicios. Dicha categorización se basó en los modelos de Reys *et al*. (1982) y Reys (1986) señalados en el capítulo II.

3.3 Procedimiento

En este apartado se detalla la forma de aplicación de los instrumentos, el examen estimativo a la muestra de estudiantes de 2º grado y las entrevistas a los alumnos seleccionados.

Se consideraron tres períodos diferentes (ver tabla VI). En el primer período se visitaron las escuelas para la aplicación del examen estimativo, el cual abarcó la primera semana. Las ocho escuelas se numeraron en forma consecutiva, de acuerdo al orden en que fueron visitadas como se verá más adelante.

En un segundo período se trabajó siete días para calificar los exámenes y seleccionar a los mejores estimadores. Una vez elegidos los alumnos, se visitaron nuevamente las escuelas, para informar sobre los resultados de los exámenes a los directivos y docentes de matemáticas de cada plantel. Asimismo, se pidió la autorización de los directores para citar a los estudiantes a las entrevistas, que se llevaron a cabo en un tercer período durante las dos semanas siguientes.

Tabla VI. Forma de aplicación de los instrumentos a los grupos seleccionados.

GRUPOS	SEMANA I	SEMANA II	SEMANA III	SEMANA IV
1-2	EXAMEN	SELECCIÓN	ENTREVISTA	
3-4	EXAMEN	SELECCIÓN	ENTREVISTA	
5-6	EXAMEN	SELECCIÓN		ENTREVISTA
7-8	EXAMEN	SELECCIÓN		ENTREVISTA

3.3.1 Aplicación del examen estimativo

Una vez elegida la muestra de estudiantes, se aplicó el examen estimativo utilizando una serie de instrucciones estándar en todas las escuelas elegidas, donde se les indicó a los alumnos el tipo de examen que contestarían. Durante las explicaciones se usaron algunos sinónimos a “estimativo”, como aproximado o cercano, para lograr una mejor comprensión. Enseguida se les explicó a los alumnos que tenían un límite de tiempo para cada pregunta, mismo que osciló entre 12 y 15 segundos para hacer la estimación mental del resultado, y 5 segundos más para apuntar la respuesta. Las instrucciones que se dieron a los estudiantes fueron: i) no usar lápiz ni papel para hacer los cálculos y ii) no apuntar los ejercicios. Asimismo, se les informó que dicho examen no iba a afectar su calificación escolar.

Se utilizó un proyector de acetatos para presentar cada pregunta y las indicaciones se proporcionaron en forma oral. También se mostraron dos ejemplos semejantes a las preguntas del examen. Cuando terminaron de contestar los ejemplos, se les informó que sus respuestas correctas podían variar, siempre y cuando estuvieran dentro de un intervalo de respuestas que les proporcionó el instructor. Con respecto a las cinco preguntas sobre la percepción que tienen los alumnos de sí mismos y del uso de la calculadora, se les explicó que una vez que terminaran el examen de cálculo estimativo tenían que contestar con honestidad a dichas preguntas, las cuales también se les proyectaron en una pantalla.

3.3.2 Aplicación de las entrevistas

De acuerdo con las instrucciones de aplicación del instrumento original, se entrevistó al 5% de los estudiantes con las mejores calificaciones del examen estimativo, quienes obtuvieron entre 25 y 20 aciertos.

Para entrevistar a los alumnos que resultaron ser los mejores estimadores, se contó con un equipo de tres personas, dos licenciados en matemáticas, que condujeron las entrevistas y tomaron notas, y un estudiante egresado de la preparatoria, quien grabó el video. Como los resultados de esta investigación dependían en gran medida de los datos recopilados en las entrevistas, fue esencial que el entrevistador siguiera una guía general, que se le proporcionó para dicho fin, en donde se le indicó la forma de abordar al estudiante, las preguntas que deberían formularse, así como algunas recomendaciones para lograr que el alumno explicara lo más ampliamente posible la forma como resolvió los ejercicios. Entre las recomendaciones más importantes se destacaron las siguientes: i) hacer que el alumno se sintiera cómodo y relajado, ii) explicarle la importancia de expresar sus razonamientos en forma oral, iii) indicarle que podía registrar algunas cosas por escrito, pero sin olvidar que lo que interesaba era su pensamiento, iv) explicarle que no tenía tiempo límite para contestar y v) aclararle que podía cambiar de estrategia si consideraba incorrecta la que estaba utilizando. Antes de empezar los ejercicios, se les hicieron tres preguntas:

i) ¿Consideras que es importante hacer cálculos estimativos?
ii) ¿En qué momentos de tu vida diaria los aplicas?
iii) ¿En tu escuela te enseñan cálculos estimativos regularmente?

Estas preguntas tuvieron la intención de saber si sus técnicas fueron aprendidas en la escuela o desarrolladas por ellos mismos, así como hacer que razonaran sobre la importancia de practicar el cálculo estimativo (ver anexo B). Al terminar la entrevista se les agradeció su participación en la investigación.

3.4 Procedimiento de análisis de resultados

Debido al enfoque bajo el cual fue diseñada la presente investigación, el análisis de resultados se dividió en dos partes. La primera parte comprende los resultados obtenidos del examen estimativo mediante un análisis estadístico. La segunda parte se refiere a un análisis de corte cualitativo sobre las entrevistas aplicadas a los buenos estimadores con el fin de profundizar en sus respuestas.

3.4.1 Procedimiento de análisis de resultados del examen estimativo

Los resultados del examen estimativo que presentaron los alumnos se analizaron aplicando estadística descriptiva. En primer término, se describieron las principales características de los sujetos que participaron en la investigación. En segundo término, se hizo un análisis de frecuencias para describir tendencias y agrupamientos en las respuestas de los alumnos, así como ocurrencias de aciertos y errores por pregunta. Posteriormente se calcularon los índices de dificultad y discriminación de los reactivos del instrumento. El grado de dificultad de cada reactivo se refiere a la proporción de personas que respondieron correctamente cada reactivo en el examen. En la presente investigación se consideró la fórmula de Crocker y Algina (1986, citados en Backhoff, Larrazolo y Rosas, 2000) para determinar el nivel de dificultad, llamado valor de ***p***:

$$\boldsymbol{p}_i = \frac{\boldsymbol{A}_i}{\boldsymbol{B}_i}$$

donde:

$\boldsymbol{p}_i$ = índice de dificultad del reactivo

A_i = número de aciertos en el reactivo i

B_i = número de aciertos más número de errores en el reactivo i

Una implicación del índice ***p*** es que la dificultad no sólo es una característica del reactivo, sino también de la población a la que se aplica el examen; es decir, el valor de ***p*** puede indicar si es muy difícil el nivel del examen para una población en particular (Matlock, 1997).

Se calculó también el índice de discriminación **D**, el cual indica que si un reactivo es bueno debe discriminar entre quiénes obtuvieron buenas calificaciones en la totalidad de la prueba y aquellos que obtuvieron bajas calificaciones. Es decir si una prueba y un reactivo miden la misma habilidad, se puede esperar que al obtener una alta calificación en el examen, también sea alta la probabilidad de contestar correctamente dicho reactivo, y por el contrario si se obtuvo una baja calificación en la prueba, también es baja la probabilidad de haber contestado correctamente el reactivo (Backhoff *et al.*, 2000). El índice **D** se cálculo bajo la siguiente fórmula:

$$\mathbf{D}i = \frac{GA - GB}{N}$$

donde:

Di = índice de discriminación del reactivo i

GA = número de aciertos en el reactivo i del 27% de personas con las puntuaciones más altas en el examen

GB = número de aciertos en el reactivo i del 27% de personas con las puntuaciones más bajas en el examen

N = Número de personas en cualquiera de los grupos GA y GB

Ebel y Frisbie (1986; citados en Backhoff *et al*., *op. cit*.) señalaron algunas recomendaciones para los reactivos en función del índice de discriminación (ver tabla VII).

Tabla VII. Poder de discriminación de los reactivos de acuerdo al valor del índice D

D	Recomendación
$\geq$ 0.39	Conservar el ítem
0.30 – 0.39	Posibilidades de mejorar
0.20 – 0.29	Necesidad de revisar
0.00 – 0.20	Revisar a profundidad
$\leq$ – 0.01	Descartar

Por último se hizo un análisis de diferencias considerando las medias obtenidas para las variables: género, edad, tipo de escuela, turno y escuelas que participaron en la investigación, se aplicó la prueba *t-student* para determinar si se tenían diferencias significativas al nivel de significancia α = 0.05 para las variables consideradas.

3.4.2 Procedimiento de análisis de las entrevistas

Las entrevistas se aplicaron al 5% de los alumnos que contestaron con mayor número de aciertos el examen estimativo, con el objeto de conocer las estrategias y procesos de pensamiento que utilizaron. Para dicho fin, se trabajó con el enfoque de la investigación cualitativa etnográfica desarrollada por Martínez (1998). El autor sugiere que se defina en primer lugar el problema a solucionar, mismo que se planteó en el capítulo uno.

El análisis cualitativo se aplicó con la idea de profundizar en las respuestas de los alumnos considerados buenos estimadores para poder describir detalladamente sus procedimientos, ideas, estrategias y algunos elementos externos que influyeron en su comportamiento durante las entrevistas. Se utilizó un sistema de grabación para las entrevistas; asimismo, el entrevistador y un observador fueron tomando notas de todo lo que consideraron importante para complementar la información.

Siguiendo las recomendaciones de Martínez (1998) se transcribieron las entrevistas íntegramente sobre hojas divididas a lo largo (ver anexo C). En una de dichas divisiones se transcribieron las entrevistas y se subrayó cualquier indicio de estrategia que hubiera utilizado el alumno en cuestión. En la otra parte de la hoja, se señalaron las estrategias detectadas (Reys, 1986) y los procesos de pensamiento (Reys *et al*., 1982) correspondientes, al lado de cada parte subrayada. Los pasos para determinar las estrategias y proceso de pensamiento utilizados fueron los siguientes:

i) Releer la entrevista subrayando las palabras más relevantes y significativas.

ii) Transcribir los párrafos que expresaban una idea o concepto central e integrarlos en tablas separadas, por cada una de las diez preguntas de la entrevista.

iii) Sintetizar al final de cada tabla del punto anterior, lo que expresaron los alumnos para cada ejercicio planteado en las entrevistas.

iv) Si aparecían estrategias diferentes para un mismo ejercicio con propiedades o atributos distintos, describirlas haciendo notar dichas diferencias.

v) Clasificar las estrategias y procesos de pensamiento encontrados.

El procedimiento de análisis de resultados desarrollado por Martínez (1998) aplicado en la presente investigación, sigue los siguientes pasos:

i) Tomar en cuenta que los datos de la información no tienen la misma importancia, el valor y significado de un dato depende del contexto en que se genera. Alguna información será central para solucionar el problema planteado, otra será periférica y secundaria.

ii) Integrar la información en un todo coherente y lógico.

iii) Integrar toda la información que pueda dar solución al problema, planteado en un esquema en forma de diagrama de flujo, de tal manera que se utilicen flechas delgadas para indicar una relación causal, o de influencia, y flechas más gruesas para representar la información más importante y significativa.

iii) Hacer un informe verbal o síntesis conceptual que describa la estructura del diagrama anterior con algunos textos directos, es decir, con algunas citas textuales de los informantes.

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Los resultados que se muestran en el presente capítulo fueron analizados en dos partes. En primer lugar se consideró un análisis cuantitativo de los resultados del examen de cálculo estimativo, aplicado a 248 alumnos distribuidos en ocho grupos de distintas escuelas secundarias. En la segunda parte se analizaron las entrevistas aplicadas al 5% de los alumnos con más altas calificaciones en el examen de cálculo estimativo bajo un enfoque cualitativo siguiendo el método desarrollado por Martínez (1998).

4.1 Análisis de los resultados del examen de cálculo estimativo

En este apartado se muestran las principales características de las escuelas y de los alumnos que participaron en la investigación, así como un análisis de frecuencias sobre las características y resultados obtenidos del examen estimativo. Se incluyen, también, los análisis de dificultad y de discriminación de dicho instrumento a través del cálculo de los índices ***p*** y **D**. Por último, se hace un análisis de diferencias con los resultados de las variables: género, edad, tipo de escuela, turno y escuelas, aplicando la prueba *t-student* con un nivel de significancia $\alpha = 0.05$.

4.1.1 Características de los sujetos

Los sujetos que participaron en este estudio pertenecen a ocho escuelas del segundo nivel de secundaria, las cuales fueron elegidas mediante un muestreo estratificado. Considerando que en la entidad hay mayor cantidad de escuelas secundarias generales y menor número de escuelas técnicas y telesecundarias, se trató de mantener dicha proporción. Se tomaron en cuenta también los turnos en que laboran las instituciones, por lo que la mitad de las escuelas seleccionadas pertenecen al turno matutino y la otra mitad al turno vespertino, incluyendo en este último una escuela particular (ver tabla VIII).

Tabla VIII. Características de las escuelas participantes en la investigación.

No. de escuela	Tipo de escuela			Modalidad		Turno	
	General	Técnica	Telesec.	Oficial	Particular	Matutino	Vespertino
1	1			1			1
2	1			1		1	
3			1	1		1	
4		1		1			1
5	1			1			1
6		1		1		1	
7	1				1		1
8			1	1		1	
Totales	**4**	**2**	**2**	**7**	**1**	**4**	**4**
%	**50**	**25**	**25**	**87.5**	**12.5**	**50**	**50**

Debido a que se trabajó con 2º grado de secundaria, la edad de la mayoría de los estudiantes fue de 13 años, la cual coincide con la edad típica para dicho grado. Sin embargo, en la tabla IX se muestra que hubo una pequeña proporción de niños de 12 y jóvenes de 15 y 16 años, esto último se debe a que el sistema de telesecundarias puede admitir estudiantes con una edad máxima de 16 años, mientras que en las escuelas técnicas y generales no pueden rebasar los 15 años en el momento de inscribirse. Dicha situación se intensifica en las escuelas rurales, y en la muestra estudiada se incluyó el plantel no. 8 con dichas características. Por otro lado, se puede apreciar en la misma tabla, que el porcentaje de mujeres (54.8%) superó ligeramente al de los hombres (45.2%).

Tabla IX. Principales características de los sujetos considerados en la investigación.

No. de escuela	Población					Edades										
	Mujeres		Hombres		Total	12		13		14		15		16		Total
	N	%	N	%		N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	
1	14	70.0	6	30.0	20	0	0.0	12	60.0	5	25.0	3	15.0	0	0.0	20
2	22	55.0	18	45.0	40	3	7.5	35	87.5	1	2.5	1	2.5	0	0.0	40
3	10	52.6	9	47.4	19	0	0.0	10	52.6	8	42.1	0	0.0	1	5.3	19
4	19	52.8	17	47.2	36	2	5.6	25	69.4	8	22.2	1	2.8	0	0.0	36
5	18	48.7	19	51.4	37	1	2.7	24	64.9	10	27.0	2	5.4	0	0.0	37
6	24	54.5	20	45.5	44	6	13.6	37	84.1	1	2.3	0	0.0	0	0.0	44
7	18	60.0	12	40.0	30	1	3.3	22	73.4	7	23.3	0	0.0	0	0.0	30
8	11	50.0	11	50.0	22	0	0.0	5	22.7	11	50.0	3	13.6	3	13.7	22
Totales	**136**	**54.8**	**112**	**45.2**	**248**	**13**	**5.2**	**170**	**68.5**	**51**	**20.6**	**10**	**4.1**	**4**	**1.6**	**248**

4.1.2 Características del examen estimativo

El instrumento que se aplicó a la población de estudio fue un examen de cálculo estimativo, que consistió en 39 reactivos, 25 de los cuales fueron ejercicios numéricos puros y 14 problemas inmersos en un contexto de la vida cotidiana de los alumnos. Se incluyeron las cuatro operaciones elementales con números enteros, decimales y fracciones comunes y mixtas.

La tabla X muestra el número de ejercicios que se incluyeron en la prueba según el tipo de operación. Se puede observar que los ejercicios no guardan una misma proporción de ocurrencia. Lo anterior se debe a que no se calificaron las operaciones en sí, sino a las estrategias de cálculo mental, las cuales se utilizan de manera más conveniente en unas operaciones que en otras.

Tabla X. Total de ejercicios numéricos y contextuales por tipo de operación, clasificados en números enteros, decimales y fracciones.

Tipo de Operación y número	Ejercicios Numéricos	Ejercicios Contextuales	Subtotal
(+, e)	1	2	3
(+, d)	1	0	1
(+, f)	1	0	1
Subtotal sumas	**3**	**2**	**5**
(-, e)	2	2	4
(-, d)	2	0	2
(-, f)	1	0	1
Subtotal restas	**5**	**2**	**7**
(x, e)	3	4	7
(x, d)	4	3	7
(x, f)	3	0	3
Subtotal multiplic.	**10**	**7**	**17**
(÷, e)	3	2	5
(÷, d)	3	1	4
(÷, f)	0	0	0
Subtotal división	**6**	**3**	**9**
(Mixto, e)	1	0	1
(Mixto, d)	0	0	0
(Mixto, f)	0	0	0
Subtotal mixtos	**1**	**0**	**1**
Total	**25**	**14**	**39**

e: números enteros d: números decimales f: fracciones

En el caso de los cinco ejercicios de sumas, se incluyeron tres reactivos con números enteros, de los cuales se esperaba que los alumnos utilizaran la estrategia del dígito de la izquierda combinándola con la de redondeo, y un ajuste final. La diferencia de los ejercicios radicó en el número de cifras incluidas en cada uno de ellos, y fue precisamente con los de cifras mayores donde se cometieron más errores. Complementando dichos ejercicios, se incluyó uno con números decimales para comprobar el manejo del valor posicional y otro con fracciones, cuyo fin principal era aplicar la estrategia de números especiales y observar que cada fracción se parecía a la unidad donde el resultado esperado era un número cercano a dos; sin embargo, en ninguno de estos casos se obtuvieron buenos resultados como puede observarse en la tabla XI.

Tabla XI. Aciertos obtenidos por pregunta en ejercicios de suma del examen estimativo.

Pregunta	Ejercicios	Aciertos	%
1 (n, +, +, e)	89 + 328 + 706	111	44.8
11 (n, +, +, d)	0.7 + 0.002 + 0.81	28	11.3
23 (n, +, f)	$^{12}/_{13} + {}^{7}/_{8}$	15	6.0
31 (c, +, +, e)	Juanito puso un banco de 99 cm de altura sobre otro banco de 39 cm y encima una silla de 37 cm, para alcanzar unos dulces de una alacena, ¿cómo cuánta altura ganó con su peligroso arreglo?	129	52.0
32 (c, +, +, +, +,e)	Esta es una cuenta del mercado que aún no ha sido sumada, ¿cómo cuánto es el total? 488 + 487 + 506 + 497 + 512	92	37.1

n: ejercicio numérico c: ejercicio contextual +: ejercicio de suma
e: números enteros d: números decimales f: fracciones

En los ejercicios de resta se mantuvo en promedio, un número de aciertos menor al 50% con excepción del ejercicio 29 que fue contestado correctamente por el 58.5% de los alumnos. En particular, en el ejercicio 25 no pudieron aplicar la estrategia de números especiales y sólo el 4.4% acertó (ver tabla XII).

Tabla XII. Aciertos obtenidos por pregunta en ejercicios de resta del examen estimativo.

Pregunta	Ejercicios	Aciertos	%
2 (n, -, e)	7,465 – 572	66	26.6
3 (n, -, e)	37,689 – 18,812	77	31.0
14 (n, -, d, e)	308 – 2.85	94	37.9
15 (n, -, d)	835.67 – 0.526	94	37.9
25 (n, -, f)	$(2\ ^{2}/_{5}) - (2\ ^{7}/_{8})$	11	4.4
29 (c, -, e)	Para un concierto de rock había 12,367 boletos, pero por lluvia sólo se vendieron 3,788, ¿cómo cuántos boletos se quedaron sin vender?	145	58.5
34 (c, -, e)	Una casa de Villas del Real cuesta $117,450.00, si los papás de Claudia compraron una y dieron $44,900.00 de enganche, ¿cómo cuánto les falta por pagar?	89	35.9

n: ejercicio numérico, c: ejercicio contextual, -: ejercicio de resta,
e: números enteros, d: números decimales, f: fracciones

Se observó que la mayoría de los estudiantes contestaron mejor los ejercicios contextuales que los ejercicios numéricos. Esto puede deberse a que los contextos fueron adaptados a su realidad y edad, así como al hecho de que al leer un problema lo construyen mentalmente y tienen más tiempo para pensar en la solución. Asimismo, hubo quien mostró temor con los ejercicios numéricos cuando se trataba de números decimales, fracciones o enteros de más de dos cifras. La tabla XIII muestra los resultados de los ejercicios de multiplicación. En los reactivos 4, 5, 6 y 33 se esperaba que aplicarán el redondeo, estrategia que sí se les enseña, sin embargo los porcentajes de aciertos fueron menores al 10%. Algo semejante sucedió con los ejercicios 12, 17, 18, 19, 20 y 24 donde se esperaba que aplicaran las estrategias de números especiales o números compatibles y los promedios de aciertos fueron menores al 20%, aunque dichas estrategias por lo general no las conocen, ni las aprenden en la escuela. Con respecto a los ejercicios contextuales 26, 27, 28, 30, 35 y 39 se pueden observar porcentajes más altos de aciertos, alcanzando en algunos casos valores mayores al 60%.

Tabla XIII Aciertos obtenidos por pregunta en ejercicios de multiplicación del examen estimativo.

Pregunta	Ejercicios	Aciertos	%
4 (n, x, e)	28 x 47	18	7.3
5 (n, x, e)	6,809 x 91	11	4.4
6 (n, x, x, e)	31 x 68 x 296	6	2.4
12 (n, x, d, e)	486 x 0.24	10	4.0
16 (n, x, f, d)	1 ½ x 1.67	59	23.8
17 (n, x, x, e, f, d)	$1\,^{7}/_{8}$ x 1.19 x 4	16	6.5
18 (n, x, d)	61.1 x 0.8	37	14.9
19 (n, x, d)	98.6 x 0.041	8	3.2
20 (n, x, x, d)	5.1 x 4.8 x 6.3	39	15.7
24 (n, x, f, e)	($^{21}/_{23}$) x 149	34	13.7
26 (c, x, d, e)	Con una lata de pintura se cubren 7.47 m^2 de superficie, ¿cómo cuántos m^2 se cubren con 4 latas?	160	64.5
27 (c, x, d, e)	¿Cómo cuánto gastará Esmeralda en 3.5 m de tela si el m cuesta $23.00?	148	59.7
28 (c, x, e)	En una maquiladora pagan $238.00 diarios en el turno nocturno, ¿cómo cuánto ganará un empleado por semana (7 días)?	163	65.7
30 (c, x, e)	Los alumnos necesitan dinero para el grupo que amenizará su fiesta de graduación, cada alumno debe cooperar con $92.00 y son 46 alumnos que se graduarán, ¿cómo cuánto les cobra el grupo?	54	21.8
33 (c, x, e)	¿Cómo cuánta área tiene este rectángulo? (28 x 47)	21	8.5
35 (c, x, d, e)	En el recreo se vendieron 24 tortas de $5.40 cada una, ¿cómo cuánto se ganó?	77	31.0
39 (c, x, e)	¿Cómo cuántos días has vivido?	54	21.8

n: ejercicio numérico c: ejercicio contextual x: ejercicio de multiplicación
e: números enteros d: números decimales f: fracciones

En los ejercicios de división los resultados fueron muy bajos, debido a que la división es la operación más complicada, pues involucra a todas las anteriores. Una excepción fue el ejercicio 7, el cual obtuvo el 47.6% de aciertos (ver tabla XIV), en este ejercicio fue relativamente fácil para los alumnos aplicar la estrategia de números compatibles, debido a que el divisor era de una cifra. En la misma tabla se puede ver que los ejercicios 21, 22 y 38 tenían la intención de que los alumnos identificaran una división entre la unidad, sin embargo el ejercicio 22 fue el de más baja resolución de todo el examen estimativo con sólo 1.6% de promedio de aciertos. En el reactivo 21 el porcentaje de aciertos aumentó a 17.7%, tal vez porque el divisor ya muestra el número 1. Por su parte en el reactivo 38 que es de tipo contextual, casi se duplicó el número de aciertos, a pesar de que el divisor es el mismo que en el ejercicio 22. Con relación al ejercicio 8 que fue contestado correctamente sólo por el 3.6 %, se pudo observar al momento de calificar, que la dificultad de dicho ejercicio consistió en que los alumnos no pudieron definir el valor posicional.

Tabla XIV. Aciertos obtenidos por pregunta en ejercicios de división del examen estimativo.

Pregunta	Ejercicio	Aciertos	%
7 (n, ÷, e)	713 ÷ 8	118	47.6
8 (n, ÷, e)	474,257 ÷ 8,127	9	3.6
9 (n, ÷, e)	22 ÷ 72	35	14.1
13 (n, ÷, e, d)	298 ÷ 71.8	40	16.1
21 (n, ÷, e, d)	648 ÷ 1.06	44	17.7
22 (n, ÷, e, d)	7,029 ÷ 0.95	4	1.6
36 (c, ÷, e)	Un grupo de 48 alumnos cooperó para la compra de un microscopio, si todos aportaron la misma cantidad y se juntaron $1,322.00, ¿cómo cuánto dio cada uno?	41	16.5
37 (c, ÷, e)	Para construir un salón de usos múltiples se pide la cooperación a los 12 grupos de una escuela, la cantidad a recaudar es de $26,400.00, ¿cómo cuánto tiene que dar cada grupo?	49	19.8
38 (c, ÷, d)	La sociedad de padres de familia de una escuela, donó 15.75 m^2 de tela para hacer cortinas. Si para cada ventana se necesitan 0.95 m^2, ¿cómo cuántas cortinas saldrán?	87	35.1

n: ejercicio numérico c: ejercicio contextual ÷: ejercicio de división
e: números enteros d: números decimales f: fracciones

Respecto a los ejercicios con fracciones, hubo muy pocos aciertos (véase tabla XV). Se puede observar, por ejemplo, que las fracciones mixtas son las que menos manejan los alumnos, como en el caso de los ejercicios 17 y 25 cuyos porcentajes de aciertos fueron cercanos al 5%. En el caso del ejercicio 16, se obtuvo un porcentaje relativamente alto de aciertos (23.8%). Lo anterior puede explicarse si se considera la facilidad par manejar la fracción ½. En los ejercicios 23 y 24 se incluyeron fracciones también muy cercanas a la unidad, sin embargo, los alumnos no pudieron percatarse de ello. La estrategia de números especiales era adecuada para estos ejercicios.

Tabla XV. Aciertos obtenidos por pregunta en ejercicios de fracciones del examen estimativo.

Pregunta	Ejercicio	Aciertos	%
16 (n, x, f, d)	$1\frac{1}{2} \times 1.67$	59	23.8
17 (n, x, x, f, d, e)	$1\,{}^{7}/_{8} \times 1.19 \times 4$	16	6.5
23 (n, +, f)	${}^{12}/_{13} + {}^{7}/_{8}$	15	6.0
24 (n, x, f, e)	$({}^{21}/_{23}) \times 149$	34	13.7
25 (n, –, f)	$(2\,{}^{2}/_{5}) - (2\,{}^{7}/_{8})$	11	4.4

n: ejercicio numérico +: ejercicio de suma – : ejercicio de resta x: ejercicio de multiplicación
e: números enteros d: números decimales f : fracciones

Se debe considerar que la forma de aplicación del examen estimativo por medio de acetatos y con tiempo límite para responder no es común en las escuelas mexicanas. Al mismo tiempo, no se enseña la estimación de resultados de manera sistemática, por lo que los resultados de dicho examen mostraron un mayor número de errores con una media de 51.5%, como se puede apreciar en la tabla XVI. Asimismo, se analizó el caso de las abstenciones, cuya media fue de 24.7% y como puede notarse en la misma tabla, se mantiene por debajo de las respuestas contestadas incorrectamente con excepción de los reactivos 6, 16, 17 y 24, en donde los tres últimos ejercicios incluyen fracciones y el ejercicio 6 se refiere a una multiplicación doble.

Tabla XVI. Porcentajes y frecuencias de aciertos, errores y abstenciones en las respuestas del examen estimativo.

Número de reactivo	Respuestas correctas		Respuestas incorrectas		Abstenciones	
	N	%	N	%	N	%
1 (n, +, +, e)	**111**	44.8	**121**	48.8	**16**	6.4
2 (n, -, e)	**66**	26.6	**165**	66.6	**17**	6.8
3 (n, -, e)	**77**	31.0	**152**	61.4	**19**	7.6
4 (n, x, e)	**18**	7.3	**138**	55.7	**92**	37.0
5 (n, x, e)	**11**	4.4	**180**	72.6	**57**	23.0
6 (n, x, x, e)	**6**	2.4	**118**	47.6	**124**	50.0
7 (n, ÷, e)	**118**	47.6	**81**	32.6	**49**	19.8
8 (n, ÷, e)	**9**	3.6	**125**	50.4	**114**	46.0
9 (n, ÷, e)	**35**	14.1	**173**	69.8	**40**	16.1
10 (n, x, ÷, e)	**8**	3.2	**128**	51.6	**112**	45.2
11 (n, +, +, d)	**28**	11.3	**188**	75.8	**32**	12.9
12 (n, x, d, e)	**10**	4.1	**150**	60.5	**88**	35.4
13 (n, ÷, d, e)	**40**	16.1	**123**	49.6	**85**	34.3
14 (n, -, d, e)	**94**	37.9	**117**	47.2	**37**	14.9
15 (n, -, d)	**94**	37.9	**102**	41.2	**52**	20.9
16 (n, x, f, d)	**59**	23.8	**85**	34.3	**104**	41.9
17 (n, x, x, f, d, e)	**16**	6.5	**105**	42.4	**127**	51.1
18 (n, x, d)	**37**	14.9	**181**	73.0	**30**	12.1
19 (n, x, d)	**8**	3.2	**147**	59.3	**93**	37.5
20 (n, x, x, d)	**39**	15.7	**128**	51.6	**81**	32.7
21 (n, ÷, d, e)	**44**	17.7	**145**	58.5	**59**	23.8
22 (n, ÷, d)	**4**	1.6	**140**	56.5	**104**	41.9
23 (n, +, f)	**15**	6.1	**147**	59.3	**86**	34.6
24 (n, x, f, e)	**34**	13.7	**70**	28.3	**144**	58.0
25 (n, -, f)	**11**	4.4	**133**	53.7	**104**	41.9
26 (c, x, d, e)	**160**	64.5	**73**	29.5	**15**	6.0
27 (c, x, d, e)	**148**	59.7	**79**	31.9	**21**	8.4
28 (c, x, e)	**163**	65.7	**65**	26.2	**20**	8.1
29 (c, -, e)	**145**	58.5	**71**	28.6	**32**	12.9
30 (c, x, e)	**54**	21.8	**161**	64.9	**33**	13.3
31 (c, +, +, e)	**129**	52.0	**88**	35.5	**31**	12.5
32 (c, +, +, +, +, e)	**92**	37.1	**139**	56.1	**17**	6.8
33 (c, x, e)	**21**	8.5	**167**	67.4	**60**	24.1
34 (c, -, e)	**89**	35.9	**125**	50.4	**34**	13.7
35 (c, x, d, e)	**77**	31.1	**150**	60.5	**21**	8.4
36 (c, ÷, e)	**41**	16.5	**141**	56.9	**66**	26.6
37 (c, ÷, e)	**49**	19.8	**151**	60.9	**48**	19.3
38 (c, ÷, d)	**87**	35.1	**88**	35.5	**73**	29.4
39 (c, x, e)	**54**	21.8	**139**	56.1	**55**	22.1
Totales	**2301**	23.8	**4979**	51.5	**2392**	24.7

n: ejercicio numérico c: ejercicio contextual
+: ejercicio de suma -: ejercicio de resta x: ejercicio de multiplicación ÷: ejercicio de división
d: números decimales e: números enteros f: fracciones

Debido a que los resultados de la tabla XVI muestran un porcentaje muy alto de respuestas incorrectas y abstenciones, se considero importante llevar a cabo un análisis del instrumento para conocer el grado de dificultad del mismo por medio de los índices de dificultad (***p***) y de discriminación (**D**), y cuyos valores se concentraron en la tabla XVII.

Tabla XVII. Ejercicios del examen estimativo, índice de dificultad **p** e índice de discriminación **D**.

No. Reactivo	Ejercicios	p	D
1 (n, +, +, e)	89 + 382 + 706	0.45	0.45
2 (n, -, e)	7, 465 – 572	0.27	0.43
3 (n, -, e)	37 689 – 18 812	0.31	0.67
4 (n, x, e)	28 x 47	0.07	0.19
5 (n, x, e)	6, 809 x 91	0.04	0.12
6 (n, x, x, e)	31 x 68 x 298	0.02	0.04
7 (n, ÷, e)	713 ÷ 8	0.48	0.52
8 (n, ÷, e)	474, 257 ÷ 8 127	0.04	0.09
9 (n, ÷, e)	22 ÷ 72	0.14	0.33
10 (n, x, ÷, e)	(347 x 6) ÷ 43	0.03	0.09
11 (n, +, +, d)	0.7 + 0.002 + 0.81	0.11	0.21
12 (n, x, d, e)	486 x 0.24	0.04	0.10
13 (n, ÷, d, e)	289 ÷ 71.8	0.16	0.33
14 (n, -, d, e)	308 – 2.85	0.38	0.79
15 (n, -, d)	835.67 – 0.526	0.38	0.64
16 (n, x, f, d)	1 ½ x 1.67	0.24	0.52
17 (n, x, x, f, d, e)	$1\ {}^{7}/_{8}$ x 1.19 x 4	0.06	0.19
18 (n, x, d)	6.31 x 0.8	0.15	0.36
19 (n, x, d)	98.6 x 0.041	0.03	0.07
20 (n, x, x, d)	5.1 x 4.8 x 6.3	0.16	0.34
21 (n, ÷, d, e)	648 ÷ 1.06	0.18	0.31
22 (n, ÷, d)	7 029.6 ÷ 0.95	0.02	0.06
23 (n, +, f)	12/13 + 7/8	0.06	0.19
24 (n, x, f, e)	(21/23) x 149	0.14	0.31
25 (n, -, f)	$(2\ {}^{2}/_{5}) - (2\ {}^{7}/_{8})$	0.04	0.09
Subtotal numéricos n=25	Promedios	0.16	0.29
26 (c, x, d, e)	Con una lata de pintura se cubren 7.47 m^2 de superficie, ¿cómo cuántos m^2 se cubren con 4 latas aproximadamente?	0.65	0.46
27 (c, x, d, e)	¿Como cuánto gastará Esmeralda en 3.5 m de tela si el m cuesta $23.00?	0.60	0.54
28 (c, x, e)	En una maquiladora pagan $238.00 diarios en el turno nocturno, ¿cómo cuánto ganará un empleado por semana aproximadamente?	0.66	0.43
29 (c, -, e)	Para un concierto de rock había 12,367 boletos, pero por lluvia sólo se vendieron 3,788 ¿cómo cuántos boletos se quedaron sin vender?	0.58	0.52
30 (c, x, e)	Los alumnos necesitan dinero para el grupo que amenizará su fiesta de graduación, cada alumno debe cooperar con $92.00 y son 46 alumnos ¿como cuánto les cobra el grupo?	0.22	0.34
31 (c, +, +, e)	Juanito puso un banco de 99 cm sobre otro de 39 cm y encima una silla de 37 cm, para alcanzar unos dulces de la alacena ¿cómo cuánta altura ganó con su peligroso arreglo?	0.52	0.45
32 (c, +, +, +, +, e)	Esta es una cuenta del mercado que aún no ha sido sumada, ¿cómo cuánto es el total? 488 + 487 + 506 + 497 + 512 =	0.37	0.55
33 (c, x, e)	¿Cómo cuánta área tiene este rectángulo? (28 x 47)	0.08	0.13
34 (c, -, e)	Una casa del fraccionamiento Villas del Real cuesta $117,450.00, si los papás de Claudia compraron una y dieron de enganche $44,900.00, ¿cómo cuánto les falta por pagar?	0.36	0.51
35 (c, x, d, e)	En el recreo se vendieron 24 tortas de $5.40 cada una, ¿como cuánto se ganó?	0.31	0.55
36 (c, ÷, e)	Un grupo de 48 alumnos cooperó para la compra de un microscopio, si todos aportaron la misma cantidad y se juntaron $1,322.00 ¿como cuánto dio cada uno?	0.17	0.18
37 (c, ÷, e)	Para la construcción de un salón de usos múltiples se pide la cooperación a los 12 grupos de una escuela, la cantidad a recaudar es de $26,400 ¿cuánto tiene que dar cada grupo?	0.20	0.33
38 (c, ÷, d)	La sociedad de padres de familia de una escuela, donó 15.75 m^2 de tela para hacer cortinas. Si para cada ventana se necesitan 0.95 m^2, ¿cómo cuántas cortinas saldrán?	0.35	0.49
39 (c, x, e)	¿Cuántos días has vivido aproximadamente?	0.22	0.31
Subtotal contextuales c =14	Promedios	0.38	0.41
Total n + c = 39	Promedios	0.27	0.35

n: ejercicio numérico c: ejercicio contextual
+: ejercicio de suma -: ejercicio de resta x: ejercicio de multiplicación ÷: ejercicio de división
d: números decimales e: números enteros f: fracciones

El índice de dificultad ***p*** indicó la proporción de personas que contestaron correctamente cada reactivo. Entre más alto fue el valor de ***p***, mejor fue el comportamiento del reactivo. En la tabla XVII puede apreciarse que los ejercicios contextuales fueron más sencillos que los ejercicios numéricos, ya que la media para los primeros fue de 0.38 mientras que para los numéricos fue de 0.16. Los valores más altos para el índice ***p*** pertenecen a los ejercicios 28, 26, 27, 29, 31, 7 y 1 con valores de 0.66, 0.65, 0.60, 0.58, 0.52, 0.48 y 0.45, respectivamente. Aunque dichos valores pueden considerarse buenos para un instrumento de medición educativo, fueron muy pocos los reactivos con valores altos. Pueden apreciarse en la misma tabla ejercicios con índices muy bajos, como es el caso de los reactivos 6, 22, 10, 19, 5, 8, 12, 25, 17, 23, 4 y 33 con valores de 0.02, 0.02, 0.03, 0.03, 0.04, 0.04, 0.04, 0.04, 0.06, 0.06, 0.07 y 0.08, respectivamente, lo cual indica que dichos ejercicios resultaron difíciles para los alumnos. Considerando el comportamiento de los reactivos en conjunto, se concluye que el examen estimativo fue un instrumento difícil, lo cual tiene sustento si consideramos que la media global del índice ***p*** fue de 0.27.

Para aplicar la fórmula del índice de discriminación **D**, se separó al 27% de los alumnos (67) que obtuvieron las mejores calificaciones en el examen estimativo y al 27% de alumnos con las más bajas calificaciones, y se sumó el número de aciertos que obtuvo cada grupo por reactivo. Se puede observar en la tabla XVII que los valores del índice **D** varían desde 0.79 hasta 0.04, y de acuerdo a las recomendaciones de Ebel *et al*. (1986; citados en Backhoff *et al*. 2000) los ejercicios 14, 3, 15, 32, 35, 27, 7, 16, 29, 38, 26, 1, 31, 2 y 28 muestran un poder de discriminación **D** $>$ 0.39, por lo tanto se deben conservar. Asimismo, los reactivos 18, 20, 30, 9, 13, 37, 21, 24 y 39, cuyos valores de **D** se encuentran entre 0.39 y 0.30, también resultaron adecuados pero pueden mejorar. El resto de los reactivos deben ser revisados para próximas ocasiones que se desee aplicar el examen estimativo en el mismo lugar. Backhoff *et al.* (*op. cit*.) señalaron que si un examen y un reactivo miden la misma habilidad, se espera que quien obtuvo una buena calificación en el examen también haya contestado bien los reactivos con un alto valor del índice **D**. En la presente investigación, se observó que los alumnos que obtuvieron el mayor número de aciertos resultaron ser buenos estimadores (ver anexo D).

El análisis del examen por tipo de operación se muestra en la tabla XVIII, para ello se calcularon los índices ***p*** y ***D***, sus medias y desviaciones estándar para cada tipo de operación y ejercicio, así como el total de los mismos. De dichos resultados se puede observar que el comportamiento de los ejercicios numéricos difiere de los contextuales; en los primeros, los ejercicios de multiplicación fueron los más difíciles para los alumnos de la muestra, mientras que en los segundos, la división resultó ser la operación más complicada. Asimismo, para ambos casos, numéricos y contextuales, los ejercicios de resta tuvieron las medias más altas. Cabe aclarar que, en la presente investigación, el examen de cálculo mental estimativo no contó con el mismo número de ejercicios por tipo de operación o por grado de dificultad, pues el éxito del examen consistió más bien en la correcta aplicación de estrategias.

Tabla XVIII. Media y desviación estándar del índice de dificultad ***p*** y del índice de discriminación **D** en los ejercicios numéricos y contextuales del examen estimativo, por tipo de operación.

Ejercicios por tipo de operación	**Ejercicios numéricos**					**Ejercicios contextuales**					**Total de ejercicios**				
	k	**p**		**D**		**k**	**p**		**D**		**k**	**p**		**D**	
		Media	**D.E.**	**Media**	**D.E.**		**Media**	**D.E.**	**Media**	**D.E.**		**Media**	**D.E.**	**Media**	**D.E.**
Suma	**3**	0.21	0.21	0.28	0.14	**2**	0.45	0.11	0.48	0.08	**5**	0.22	0.21	0.36	0.15
Resta	**5**	0.28	0.14	0.51	0.27	**2**	0.47	0.16	0.49	0.02	**7**	0.33	0.16	0.58	0.13
Multiplicación	**10**	0.10	0.07	0.22	0.15	**7**	0.39	0.24	0.39	0.15	**17**	0.22	0.21	0.29	0.17
División	**6**	0.17	0.16	0.27	0.17	**3**	0.24	0.01	0.32	0.16	**9**	0.19	0.14	0.27	0.16
Ej. Mixto	**1**	0.03	0	0.09	0	**0**	0	0	0	0	**1**	0.03	0	0.09	0
Totales	**25**	0.16	0.14	0.29	0.20	**14**	0.38	0.19	0.40	0.14	**39**	0.24	0.19	0.34	0.19

Se incluye también un análisis de las cinco preguntas mejor contestadas y de las cinco con mayor número de errores, para tener una visión general del desempeño académico de los alumnos. Dicho análisis se muestra en las tablas XIX y XX con los intervalos aceptables de respuesta. Nuevamente, se observa que los cinco reactivos mejor contestados son contextuales y los cinco ejercicios menos contestados son puramente numéricos. Se puede señalar que los alumnos no manejan con soltura ninguna estrategia de cálculo mental, incluyendo el redondeo; a pesar de enseñarse de manera específica en las escuelas mexicanas, no lo pudieron aplicar correctamente.

Tabla XIX. Porcentaje de aciertos de las cinco preguntas mejor contestadas en el examen estimativo. Se incluyen los intervalos de respuestas aceptables propuestos por Reys *et al*. (1982), así como la respuesta exacta.

No. de pregunta	Pregunta	Intervalos de respuestas aceptables	Respuesta exacta	% de aciertos
28 (c, x, e)	En una maquiladora pagan $238.- diarios en el turno nocturno ¿Cómo cuánto ganará un empleado por semana (7 días)?	(1,400 –1,750)	1, 666	65.73
26 (c, x, d, e)	Con una lata de pintura se cubren 7.47 m^2 de superficie ¿Cómo cuántos m^2 se cubren con 4 latas?	(28 – 32)	29.88	64.52
27 (c, x, d, e)	¿Cómo cuánto gastará Esmeralda en 3.5 m de tela, si el m cuesta $23.00?	(69 – 100)	80.50	59.68
29 (c, -, e)	Para un concierto de rock había 12,367 boletos, pero por lluvia sólo se vendieron 3,788 ¿Cómo cuántos boletos se quedaron sin vender?	(8000 – 9000)	8, 579	58.47
31(c, +, +, e)	Juanito puso un banco de 99 cm sobre otro banco de 39 cm, y encima una silla de 37 cm, para alcanzar unos dulces de la alacena ¿Cómo cuánta altura ganó con su peligroso arreglo?	(160 – 200)	175	48.39

Tabla XX. Porcentaje de aciertos de las cinco preguntas menos contestadas del examen estimativo. Se incluyen los intervalos de respuestas aceptables propuestos por Reys *et al.* (1982), así como la respuesta exacta.

No. de pregunta	Pregunta	Intervalos de respuestas aceptables	Respuesta exacta	% de aciertos
22 (n, ÷ , d)	7,029.6 ÷ 0.95	(7000 – 8000)	7,399.58	1.61
6 (n, x, x, e)	31 x 68 x 298	(540,000 – 630,000)	628,184	2.42
19 (n, x, d)	98.6 x 0.041	(3.5 – 4.1)	4.0426	3.23
10 (n, X, ÷ ,e)	(347 x 6) ÷ 43	(45 – 60)	48.41	3.23
8 (n, ÷, e)	474, 257 ÷ 8,127	(50 – 60)	58.35	3.63

4.1.3 Análisis de diferencias

Con la finalidad de saber si las diferencias encontradas entre las medias de las variables consideradas en el presente estudio son estadísticamente significativas o se deben al azar, se determinó el coeficiente *t-student* con un nivel de confianza del 95%, para lo cual se calcularon la media y la desviación estándar de las variables: género, edad, tipo de escuela, turno en el que laboran y escuela a la que pertenecen los participantes.

El coeficiente *t-student* de la variable género mostró que sí hubo diferencias significativas entre las medias, resultando dicha variable a favor de los hombres. Sin embargo, considerando que las calificaciones del examen fueron bajas en general, no se puede decir que son buenos estimadores.

Para determinar las posibles diferencias entre las medias de la variable edad, se dividió a los alumnos en tres categorías: 12-13 años, 14 años y 15-16 años. Se encontraron diferencias significativas entre el primero y el tercer grupo, lo que significa que los alumnos de menor edad respondieron mejor que los mayores (véase tabla XXI). Con respecto al análisis de las variables tipo de escuela y turno no hubo diferencias significativas.

Tabla XXI. Medias y desviaciones estándar de las variables consideradas en el examen estimativo y resultados de la prueba *t-student*.

Variables **Género**	**N**	**Media**	**D. E.**
Mujeres	136	8.47	4.99
Hombres	112	10.26*	5.90
Edad			
12-13 años	183	9.77	5.53
14 años	51	8.59	5.50
15-16 años	14	6.39*	3.93
Tipo de escuela			
Secundarias generales	127	8.93	5.63
Secundarias técnicas	80	9.86	5.49
Telesecundarias	41	9.22	5.13
Turno			
Turno matutino	125	9.57	5.45
Turno vespertino	123	8.98	5.52
Escuelas			
Escuela 1	20	7.50	5.43
Escuela 2	40	8.33	6.03
Escuela 3	19	10.47	6.36
Escuela 4	36	8.44	5.72
Escuela 5	37	6.49	3.75
Escuela 6	44	11.02	4.96
Escuela 7	30	13.70	4.34
Escuela 8	22	8.14	3.56

$*\ \alpha = 0.05$

Los resultados de la prueba *t-student* de los ocho grupos de las escuelas participantes se muestran en la tabla XXII. Se observa en dicha tabla que el grupo de la escuela 7 presentó diferencias significativas con respecto al resto de los grupos. Asimismo, el grupo de la escuela 6 presentó diferencias significativas con el resto de las escuelas a excepción del grupo de la escuela 3.

Tabla XXII.- Resultados de la prueba *t-student* aplicada a los ocho grupos de las escuelas que participaron en la investigación.

	Esc. 1	**Esc. 2**	**Esc. 3**	**Esc. 4**	**Esc. 5**	**Esc. 6**	**Esc. 7**	**Esc. 8**
Esc. 1	-							
Esc. 2	0.519	-						
Esc. 3	1.570	1.251	-					
Esc. 4	0.599	0.081	1.203	-				
Esc. 5	0.826	1.592	2.948	1.726	-			
Esc. 6	2.553*	2.240*	0.370	2.159*	4.561*	-		
Esc. 7	4.472*	4.136*	2.115*	4.137*	7.290*	2.397*	-	
Esc. 8	0.455	0.135	1.473	0.221	1.664	2.423*	4.913*	-

$* \alpha = 0.05$

En la tabla XXIII se reúnen cinco preguntas sobre la percepción que tienen los estudiantes de sí mismos respecto al conocimiento y manejo de la estimación numérica y al uso de la calculadora. Lo más sobresaliente con respecto a la enseñanza, es que el 91.5% piensan que es un proceso importante, lo cual podría ser tomado en cuenta para incorporar el cálculo estimativo en el trabajo escolar. Sobre el uso de la calculadora, aproximadamente, una tercera parte de docentes no permiten ni enseñan su uso, y entre los alumnos sólo la utilizan regularmente el 54.4%. En la misma tabla se observa que la mayoría de los alumnos tienen calculadora, hecho que debe ser aprovechado para propiciar en forma adecuada su uso y fomentar tanto el cálculo numérico mental como el estimativo.

Tabla XXIII. Porcentajes de respuestas a las preguntas complementarias del examen estimativo.

No. pregunta	**Pregunta**	**Sí %**	**No %**	**No sé %**	**Total %**
40	¿Eres buen estimador?	22.6	38.3	39.1	100
41	¿Crees que estimar es importante?	91.5	4.8	3.7	100
42	¿Tienes calculadora en tu casa?	94.4	5.6	--	100
43	¿Te dejan usar calculadora en la escuela?	69.0	31.0	--	100
44	¿Usas la calculadora regularmente?	54.4	45.6	--	100

4.2 Análisis de resultados de las entrevistas

En el presente apartado se presenta el análisis de las entrevistas aplicadas al 5% de los alumnos que obtuvieron el mayor número de aciertos en el examen estimativo. Dicho análisis está basado en el método de corte cualitativo desarrollado por Martínez (1998), y tiene la intención de conocer a profundidad lo que los alumnos entrevistados piensan, observan y concluyen cuando resuelven ejercicios de cálculo estimativo. De acuerdo al método aplicado, se integró la información en un diagrama de flujo, acompañado de una síntesis conceptual. Para complementar el análisis, se describe a los sujetos de estudio y las frecuencias de aciertos y estrategias de cálculo estimativo que utilizaron, así como los procesos mentales involucrados.

4.2.1 Sujetos entrevistados

De un total de 248 alumnos se eligieron 12, quienes obtuvieron un número de aciertos el cual osciló entre 20 y 25. La mayoría son del sexo masculino, con una edad de 13 años y pertenecen al turno vespertino (ver tabla XXIV). Ningún alumno de los planteles 5 y 8 obtuvieron un número de aciertos aceptable para participar en las entrevistas. Una característica común de todos los alumnos entrevistados es que sus calificaciones escolares en matemáticas son altas, hecho que se comprobó solicitando a las autoridades escolares los promedios finales en dicha materia. Tal situación fue muy importante para la presente investigación ya que fue uno de los supuestos de la misma.

Las entrevistas fueron videograbadas, lo cual provocó cierta incomodidad en los alumnos durante el desarrollo de las mismas; sin embargo, el entrevistador logró tranquilizarlos y les fue posible concentrarse en sus respuestas.

Tabla XXIV. Datos generales de los alumnos entrevistados y de las escuelas a las que pertenecen, así como respuestas correctas e incorrectas a las 10 preguntas de la entrevista (P1- P10).

Alumno	Aciertos	Sex	Edad	Esc	Turn	Tipo	Prom	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
1	25	M	13	1	V	1	9.0	C	C	C	I	C	C	C	C	C	I
2	25	M	13	2	M	1	10	C	C	C	C	C	C	I	C	C	I
3	24	M	13	4	V	2	9.0	C	C	I	I	C	C	C	C	C	I
4	23	M	13	2	M	1	10	C	C	C	C	C	C	C	C	C	I
5	23	M	13	3	M	3	9.2	C	C	C	C	C	C	C	C	C	I
6	22	F	14	3	M	3	9.8	C	C	C	I	C	I	C	C	C	I
7	22	F	13	7	V	1	9.2	C	C	C	C	C	C	I	C	C	C
8	21	M	13	4	V	2	9.3	C	C	I	I	C	C	C	C	C	C
9	21	M	13	6	V	1	10	C	C	C	C	C	C	C	C	C	I
10	21	M	14	7	V	1	9.2	C	C	C	C	C	C	C	C	C	I
11	20	M	14	4	V	2	9.6	C	C	I	C	C	C	C	C	C	I
12	20	M	12	7	V	1	9.4	C	C	C	C	C	C	C	C	I	C
Total de aciertos en cada pregunta de la entrevista								12	12	9	8	12	11	10	12	11	3

Sexo F- Femenino, M- Masculino; Turno M- matutino, V- vespertino; Tipo 1 - general, 2 - técnica, 3 - telesecundaria; Preguntas C- correcta, I - incorrecta

Se muestra en la tabla XXV la frecuencia de cada estrategia utilizada, así como los procesos mentales que involucran dichas estrategias. Se puede observar en dicha tabla que los alumnos no siempre hacen ajustes finales, sólo el alumno que ocupa el octavo sitio hizo ajustes para todos los ejercicios. También se observa que la estrategia manejada con más soltura fue el redondeo, pues es la única estrategia que se les enseña en sus clases de matemáticas. Con respecto a los procesos mentales, la reformulación fue el que manejaron más frecuentemente, lo cual indica que la mayoría trató de encontrar datos más sencillos a los originales para resolver los ejercicios.

Tabla XXV. Frecuencia de estrategias y procesos mentales utilizados por los alumnos entrevistados.

#	Estrategias							Procesos mentales		
Alumno	1	2	3	4	5	6	7	R	T	C
1	3	1	1	3	4	3	0	4	7	3
2	1	2	3	2	5	3	0	6	7	3
3	2	2	2	5	2	6	1	5	7	6
4	1	1	7	4	5	1	0	9	9	1
5	4	1	4	1	4	2	0	9	5	2
6	1	3	3	0	1	3	0	7	1	3
7	2	0	7	3	5	5	0	7	10	5
8	8	1	4	2	3	10	0	13	5	10
9	3	0	7	3	4	1	1	8	9	1
10	4	1	5	1	4	5	2	9	5	5
11	4	0	7	2	3	2	1	11	5	2
12	4	0	6	1	2	4	1	10	3	4
Totales	37	12	56	27	42	45	6	98	73	45

Estrategias: 1- Dígito de la izquierda
2- Agrupación
3- Redondeo
4- Números compatibles
5- Números especiales
6- Ajuste
7- Algoritmo de lápiz y papel

Procesos: R- reformulación
T- traducción
C- comparación

4.2.2 Análisis de las respuestas a los ejercicios de las entrevistas

En este apartado se presentan cada uno de los ejercicios del cuestionario utilizado en las entrevistas con las respuestas individuales. Dichas respuestas sólo incluyen la información donde está plasmada la estrategia de cálculo estimativo que utilizó cada estudiante. Posteriormente se presenta un esquema que resume las respuestas obtenidas.

Ejercicio no. 1:

$$\begin{array}{r} 87,419 \\ 92,765 \\ +\ 90,045 \\ 81,974 \\ \underline{98,102} \end{array}$$

Tabla XXVI. Respuestas a la pregunta no. 1 de la entrevista contestada por cada alumno y síntesis de las mismas.

# Alumno	Aspectos relevantes de las respuestas dadas por alumnos entrevistados para la pregunta no. 1.
1	Veo los números de la izquierda, los redondeo y los sumo.
2	Como se parecen los números más grandes, los redondeo y multiplico por el # de veces que son.
3	Observo los mayores y los redondeo al mismo número. Multiplico por las veces que se repiten.
4	Se forman dos grupos de números parecidos: 80 y 90. Veo cuantos hay de cada uno y los sumo.
5	Me fijo en los mayores y los sumo, luego le agrego un poco más, según como sea el resto.
6	Agrupo los números mayores que se parezcan y multiplico por las veces que se repitan y sumo.
7	Veo los números mayores y los voy redondeando y sumando.
8	Redondeo los números de la izquierda por unos más grandes, los sumo y luego les resto algo.
9	Observo los de la izquierda, los redondeo y los sumo, luego me fijo en los demás y le agrego algo.
10	Junto los números de la izquierda que se parecen y multiplico por las veces que salen, luego sumo los resultados y le agrego algo más.
11	Primero redondeo los de izquierda, luego los que siguen y se los sumo, y así hasta terminar.
12	Observo los números de la izquierda y los sumo, luego le sumo los demás números redondeados
Síntesis de la forma de responder la pregunta no. 1, por los alumnos entrevistados	
Observo→veo→números de la izquierda→redondeo→sumo→agrego un poco→ resultado ↕ ↕ Números mayores agrupo→multiplico→sumo→resultado	

El ejercicio número uno fue contestado correctamente por todos los alumnos entrevistados. Las estrategias de cálculo estimativo que se utilizaron fueron: dígito de la izquierda, redondeo y agrupación. El proceso mental más utilizado fue la reformulación.

Ejercicio no. 2:

$$8{,}127 \div 474{,}257 =$$

Tabla XXVII. Respuestas a la pregunta no. 2 de la entrevista contestada por cada alumno y síntesis de las mismas.

# Alumno	Aspectos relevantes de las respuestas dadas por alumnos entrevistados para la pregunta no. 2.
1	Tomo los números mayores y los divido, luego le pongo un poco más.
2	Me fijo en los números mayores y veo a cuanto toca más o menos.
3	Veo los números mayores y los redondeo con ceros y hago la división.
4	Observo el número de adentro y lo cambio por uno más fácil y hago la división.
5	Veo los números de la izquierda y busco los que multiplicados den lo de adentro.
6	Veo los números y pienso en cuales números multiplicados me dan lo de adentro.
7	Redondeo los números mayores y hago la división.
8	Cambio los números de la izquierda por unos más fáciles y hago la división.
9	Veo los números de la izquierda y hago una división aproximada.
10	Veo los números mayores y los divido.
11	Veo el número mayor de afuera y los números mayores de adentro y los divido y agrego ceros
12	Redondeo los números de la izquierda y los divido.
Síntesis de la forma de responder la pregunta no. 2, por los alumnos entrevistados	
Veo números mayores dividendo y divisor→redondeo→veo que toca→agrego o quito→resultado ↕ busco números que multiplicados me den el dividendo→resultado	

Este ejercicio también fue contestado correctamente por los 12 alumnos entrevistados. Las estrategias que más utilizaron fueron: dígito de la izquierda y redondeo. El proceso mental más utilizado fue la reformulación.

Ejercicio no. 3:

12/13 + 7/8 =

Tabla XXVIII. Respuestas a la pregunta no. 3 de la entrevista contestada por cada alumno y síntesis de las mismas.

Alumno	Aspectos relevantes de las respuestas dadas por alumnos entrevistados para la pregunta no. 3.
1	Trato de encontrar a que números se parecen los del problema y los sustituyo para sumarlos.
2	Veo que los números del problema se parece a uno, entones es como 1+1 = 2.
3	No contestó.
4	Observo las fracciones y veo que se acercan a uno, entonces sumo 1+1.
5	Busco fracciones parecidas, pero más sencillas.
6	Convierto a decimales y sumo.
7	Busco fracciones parecidas a las del problema y sumo.
8	No contestó.
9	Transformó a otras fracciones equivalentes y sumó.
10	Utilizó algoritmo de lápiz y papel.
11	No contestó.
12	Utilizó algoritmo de lápiz y papel.
Síntesis de la forma de responder la pregunta no. 3, por los alumnos entrevistados	
Veo fracciones→observo que son muy cercanas a uno→sumo 1+1→le quito un poco→resultado	

Dicho ejercicio fue contestado sólo por nueve alumnos. La mayoría de los problemas se presentaron en los ejercicios con fracciones. La estrategia más utilizada fue la de números especiales. El proceso más utilizado fue la traducción.

Ejercicio no. 4:

486 X 0.24 =

Tabla XXIX. Respuestas a la pregunta no. 4 de la entrevista contestada por cada alumno y síntesis de las mismas.

# Alumno	Aspectos relevantes de las respuestas dadas por alumnos entrevistados para la pregunta no. 4.
1	Error.
2	Veo que 0.24 se parece a ¼, entonces ya nada más divido entre cuatro el número.
3	No contestó.
4	Veo que 0.24 es como ¼ y divido entre cuatro el 486.
5	Observo que el 0.24 es más o menos ¼. Divido entre cuatro.
6	No contestó.
7	Veo el 0.24 como ¼ y divido entre cuatro.
8	No contestó.
9	Identifico el 0.24 como ¼ y divido entre cuatro.
10	Observo que el 0.24 es como ¼, entonces divido entre dos y luego otra vez entre dos.
11	Veo el número decimal como una fracción.
12	Redondeo el número y le saco cuarta.
Síntesis de la forma de responder la pregunta no. 4, por los alumnos entrevistados	
Veo que 0.24 se parece a ¼ →redondeo→le quito un poco→resultado ↕ divido la cantidad entre 4	

El ejercicio no. 4 fue contestado correctamente sólo por ocho alumnos. La estrategia de cálculo mental que más utilizaron fue la de números especiales. El proceso mental más utilizado fue el de traducción.

Ejercicio no. 5:

Calcula el área de un rectángulo cuyas dimensiones son: 28 X 47

Tabla XXX. Respuestas a la pregunta no. 5 de la entrevista contestada por cada alumno y síntesis de las mismas.

# Alumno	Aspectos relevantes de las respuestas dadas por alumnos entrevistados para la pregunta no. 5.
1	Me fijo en los números de la izquierda y los multiplico, luego multiplico los otros y los sumo.
2	Redondeo a la siguiente decena y los multiplico.
3	Como veo que están muy cercanos a 30 y 50 los redondeo y los multiplico.
4	Redondeo uno de los números para 30 y el otro para 40 y los multiplico.
5	Redondeo a los siguientes números y los multiplico.
6	Veo que se parecen a 30 y 50 y los redondeo para multiplicarlos.
7	Redondeo los números y los multiplico.
8	Veo los números de la izquierda y los multiplico, luego multiplico los demás y los sumo.
9	Redondeo a 30 y 50 y los multiplico.
10	Redondeo los dos números para abajo y los multiplico.
11	Redondeo los dos números para la decena siguiente y los multiplico.
12	Redondeo y multiplico los números de la izquierda y agrego ceros.
Síntesis de la forma de responder la pregunta no. 5, por los alumnos entrevistados	
Me fijo en los números→Multiplico los mayores→multiplico los demás→quito o aumento→resultado ↕ redondeo→los multiplico→resultado	

Este ejercicio fue contestado por el total de los alumnos y las estrategias que más utilizaron fueron: dígito de la izquierda y el redondeo. El proceso más utilizado fue la reformulación.

Ejercicio no. 6:

Si el 30% de los aficionados de la serie mexicana de béisbol compran un refresco ¿Cómo cuántos refrescos se vendieron, si la asistencia fue de 54,215 personas?

Tabla XXXI. Respuestas a la pregunta no. 6 de la entrevista contestada por cada alumno y síntesis de las mismas.

# Alumno	Aspectos relevantes de las respuestas dadas por alumnos entrevistados para la pregunta no. 6.
1	Veo el número y le saco la mitad (50%), otra vez (25%) y le aumento un poquito para el 30%.
2	Veo que el 30 es como 1/3 de 100, entonces divido entre tres el número.
3	El 54 lo tomo como 100 (el doble) y saco el 30%, al resultado le saco mitad.
4	Pienso en sacar el 10% y a lo que sale lo multiplico por tres.
5	Como me piden el 30%, saco el 50% y luego otra mitad (25%) y luego le aumento un poco.
6	No contestó.
7	Veo el número y le saco el 10% y luego multiplico por tres.
8	Me fijo en los números de la izquierda y los multiplico, y le agrego los ceros que faltan.
9	Redondeo el número a un múltiplo de 1000 y lo multiplico por tres.
10	Divido entre dos (50%), luego entre dos otra vez (25%) y le agrego un poco para tener el 30%.
11	Divido el número entre el 30, es menos de la mitad, como un cuarto menos.
12	Redondeo a un múltiplo de 10,000 y lo multiplico por tres.
Síntesis de la forma de responder la pregunta no. 6, por los alumnos entrevistados	
Observo el número→redondeo→multiplico por 3 el dígito de la izquierda→quito un poco→resultado ↕ Divido a la mitad (50%)→Vuelvo a dividir a la mitad (25%)→le aumento un poco→resultado ↕ Saco el 10% y a lo que obtengo, lo multiplico por 3→resultado	
Observo el %→es como 1/3 →divido el número entre 3→resultado ↕ redondeo→divido el número entre 3→le quito un poco→resultado	
Observo el número y el %→redondeo→multiplico dígitos de la izquierda→agrego ceros→resultado	

Este ejercicio lo contestaron correctamente 11 alumnos. Las estrategias que más utilizaron fueron: redondeo, números especiales y números compatibles. Algunos jóvenes centraron su atención en el %, otros en el número, y un tercer grupo observó el número y el % al mismo tiempo, lo cual dio como resultado una gran variedad de formas de abordar el problema. La riqueza misma de las respuestas generó que se utilizarán los tres procesos mentales: reformulación, traducción y comparación.

Ejercicio no. 7:

Las concesiones de la serie mexicana de béisbol, tuvieron ingresos por $21´319,908.00. Si dicha cantidad se divide en partes iguales entre los 26 equipos ¿Cómo cuánto recibe cada equipo?

Tabla XXXII. Respuestas a la pregunta no. 7 de la entrevista contestada por cada alumno y síntesis de las mismas.

# Alumno	Aspectos relevantes de las respuestas dadas por alumnos entrevistados para la pregunta no. 7.
1	Observo los números de la izquierda y veo que no alcanza a uno, entonces son como 900,000.
2	Como no les toca a un millón entonces 980,000 es una buena aproximación. (error).
3	Como el 21 y el 26 se parecen se podría decir que toca a uno, pero no alcanza y es menos.
4	Veo los números de la izquierda y no toca a uno, entonces son como 800,000.
5	Observo los números de la izquierda y lo tomo como 900,000.
6	Como no toca a uno, son como 900,000.
7	Redondeo el 26 a 30 y el 21 a 20 y me da como 600,000.
8	Divido el 26 y el 21 y toca como a 900,000.
9	Veo los números de la izquierda y divido, toca como 800,000.
10	Veo los números que voy a dividir y son como 900,000.
11	Veo que toca a menos de uno , entonces son como 900,000.
12	Observe que no alcanzaba para darles un millón, entonces son como 900,000.
Síntesis de la forma de responder la pregunta no. 7, por los alumnos entrevistados	
Observo los números de la izquierda→veo que 21÷26 no alcanza→toca a menos de 1→resultado ↕ redondeo el dividendo y el divisor→veo que toca a menos de 1→resultado	

El problema fue contestado correctamente por diez alumnos. Los errores más comunes se debieron a la falta de un ajuste final, pero las estrategias de cálculo mental fueron adecuadas: dígito de la izquierda, redondeo y números compatibles. El proceso más utilizado fue la reformulación.

Ejercicio no. 8:

Esta es una cuenta del mercado que aún no ha sido sumada, ¿Cómo cuánto es el total?	79 79 44 130 34 105 57 + 29 65 30 31 429 11 34 8

Tabla XXXIII. Respuestas a la pregunta no. 8 de la entrevista contestada por cada alumno y síntesis de las mismas.

# Alumno	Aspectos relevantes de las respuestas dadas por alumnos entrevistados para la pregunta no. 8.
1	Voy redondeando número por número y sumándolos uno por uno.
2	Voy juntando números que me den como 100 y los voy sumando.
3	Busco parejas de números que me den como múltiplos de 10 o de 100 y los sumo.
4	Redondeo todos los números y los voy sumando al mismo tiempo.
5	Redondeo y sumo sólo los número de la izquierda de cada sumando.
6	Redondeo primero los números de más a la izquierda, luego los menores y los sumo.
7	Redondeo todos los números y los voy sumando uno por uno.
8	Sumo los números de la izquierda y luego redondeo los demás, los sumo y se los agrego.
9	Redondeo los números uno por uno y los voy sumando.
10	Sumo las columnas de izquierda a derecha.
11	Redondeo cada número y los voy sumando uno por uno.
12	Redondeo y sumo los números uno por uno.
Síntesis de la forma de responder la pregunta no. 8, por los alumnos entrevistados	
Observo números→redondeo los de la izquierda y sumo→redondeo y sumo los demás→resultado ↕ redondeo y sumo uno por uno→resultado	

El problema fue contestado correctamente por todos los alumnos y las estrategias que más se utilizaron fueron: dígito de la izquierda, redondeo y agrupación. El proceso mental más utilizado fue la reformulación.

Ejercicio no. 9:

Estima el 15% de descuento para una chamarra que cuesta $28,000.00

Tabla XXXIV. Respuestas a la pregunta no. 9 de la entrevista contestada por cada alumno y síntesis de las mismas.

# Alumno	Aspectos relevantes de las respuestas dadas por alumnos entrevistados para la pregunta no. 9.
1	Buscar el 15% es como sacar la séptima parte de 100, veo el 28,000 y lo divido entre 7.
2	Veo que el 15 es como la sexta parte de 100, entonces divido entre seis el 28,000.
3	Me fijo en el 28,00 y veo que es como ¼ parte, entonces divido el 15/ 4 y el descuento es ese.
4	Calculo el 10% y luego la mitad y los sumo.
5	Saco la mitad (50%) y otra mitad (25%) y otra mitad (12.5%) y le aumento un poco más.
6	No quiso explicar como lo hizo, pero sí lo contestó bien.
7	Redondeo el 28 a 30, saco el 10% de 30,000 y luego la mitad (5%) y sumo esas cantidades.
8	Multiplico 28X10= 280 y le saco mitad, son 140. Sumo 280 + 140 = 420 y le agrego los ceros.
9	Observo el 15 y veo que es como 1/6 de 100. Redondeo el 28 a 30 y lo divido entre 6.
10	Saco el 10% y a esto le saco la mitad y los sumo.
11	Redondeo el 28 a 30 y lo multiplico por 15.
12	El 10% es como 2,000 y luego la mitad son 1,000, los sumo y me da como 3,000 (error).

Síntesis de la forma de responder la pregunta no. 9, por los alumnos entrevistados

Observo el %→es como 1/7 de 100→divido la cantidad entre 7→resultado
↕
↕ es como 1/6 de 100→divido la cantidad entre 6→resultado

descompongo el 15 como 10+5→saco el 10%→saco el 5%→sumo los dos %→resultado

Observo la cantidad→el 28 es como ¼ parte de 100→le saco cuarta a 15→pongo ceros→resultado
↕
saco la mitad (50%)→otra vez mitad (25%)→otra vez saco mitad (12.5%)→agrego algo→resultado

Dicho ejercicio, al igual que el problema no. 6 trata un problema de porcentajes y en ambos casos se dio una gran variedad de respuestas correctas. Fue contestado correctamente por 11 alumnos, el estudiante que contestó erróneamente fue porque no hizo un ajuste final adecuado.

Las estrategias a las que más recurrieron los alumnos fueron: redondeo, números compatibles y números especiales. Los procesos mentales más utilizados fueron: reformulación y traducción.

Ejercicio no. 10:

$$\frac{4}{9} + \frac{5}{10} = 1\frac{5}{90}$$

Un alumno se equivocó en uno de estos ejercicios.

$$\frac{5}{8} + \frac{4}{7} = \frac{8}{15}$$

¿Cuál respuesta es razonable?

$$\frac{8}{15} + \frac{11}{20} = 1\frac{1}{12}$$

Tabla XXXV. Respuestas a la pregunta no. 10 de la entrevista contestada por cada alumno y síntesis de las mismas.

# Alumno	Aspectos relevantes de las respuestas dadas por alumnos entrevistados para la pregunta no. 10
1	Error. El segundo, porque cada número de la suma se pasa del medio y el resultado también.
2	Error. El segundo...., no es la uno... ya no pudo contestar nada más
3	No contestó. No estoy seguro....
4	Error. El ejercicio dos porque los números son menores que uno y entonces el resultado también.
5	Error. El primero. Me fije en los números de abajo (denominadores).
6	No contestó.
7	Veo que en el primero no alcanza a formarse la unidad, porque una fracción es menos de ½. En el segundo debería dar más de uno porque cada fracción se pasa de ½ , entonces también está mal. El tercero está bien porque las fracciones se pasan un poquito de ½, y el resultado debe ser un entero y un poco más.
8	El ejercicio 3 es el correcto, porque aquí se suman y ésta es una mitad y ésta también, o sea que ½ + ½ = 1, más bien sería un entero y se pasa una pequeña cantidad.
9	Error. El primero porque el denominador es 90.
10	Error. El primero porque saco el denominador que es 9 x 10 = 90
11	Error. El primero porque como es suma se multiplican los denominadores y da 90.
12	El primero está mal porque se pasa de uno, el segundo también porque debería ser más de uno, entonces en ejercicio 3 es el correcto.
Síntesis de la forma de responder la pregunta no.10, por los alumnos entrevistados	
Observo ej. 1→una fracción es menor de ½ y otra poco más de $^{1}/_{2}$→no suman uno (incorrecta) Observo ej. 2→las fracciones son mayores de ½ cada una→deben sumar más de 1 (incorrecta) Observo ej. 3→las fracciones son mayores de ½ →deben sumar un poco más de uno (correcta)	

El ejercicio no. 10 resultó muy difícil para los alumnos entrevistados, sólo tres lo contestaron correctamente. Se pudo observar que el manejo de los números fraccionarios causa mayores problemas en los estudiantes. La estrategia que más se utilizó fue la de números especiales. El proceso mental más utilizado fue la traducción.

El siguiente paso del método de Martínez (1998) es integrar, por una parte la información que genera el problema, y por otro lado la información que le pueda dar solución. Como se mencionó en el capítulo de metodología, el problema consiste en que la mayoría de los alumnos desarrollan un bajo sentido del número en las escuelas. En la figura 1 se presenta dicha información por medio de un diagrama de flujo.

En primer lugar se partió de tres aspectos: los programas de matemáticas de secundaria, los alumnos y los maestros. Como puede apreciarse en la misma figura, los programas actuales de matemáticas en secundaria no resaltan la relación que existe entre la práctica del cálculo estimativo y un desarrollo adecuado del sentido del número.

Enseguida se muestra, que a pesar de no practicar el cálculo estimativo en forma continua y sistemática en las escuelas, hay alumnos buenos estimadores, que lo han llegado a ser debido a que lo practican en situaciones de su vida cotidiana.

En tercer lugar, si se toma en cuenta que los maestros no lo enseñan, puede ser simplemente porque no están motivados. Por el contrario, si están motivados y muestran interés, pero no reciben apoyos como cursos o material didáctico adecuado, tampoco lo enseñan. En ambas situaciones se llega nuevamente al problema. Finalmente, si los maestros están motivados e interesados en enseñar y practicar el cálculo estimativo en sus grupos, y se les proporciona el apoyo necesario, se puede obtener una solución al problema planteado y aumentar el número de alumnos que muestren un alto desarrollo del sentido numérico.

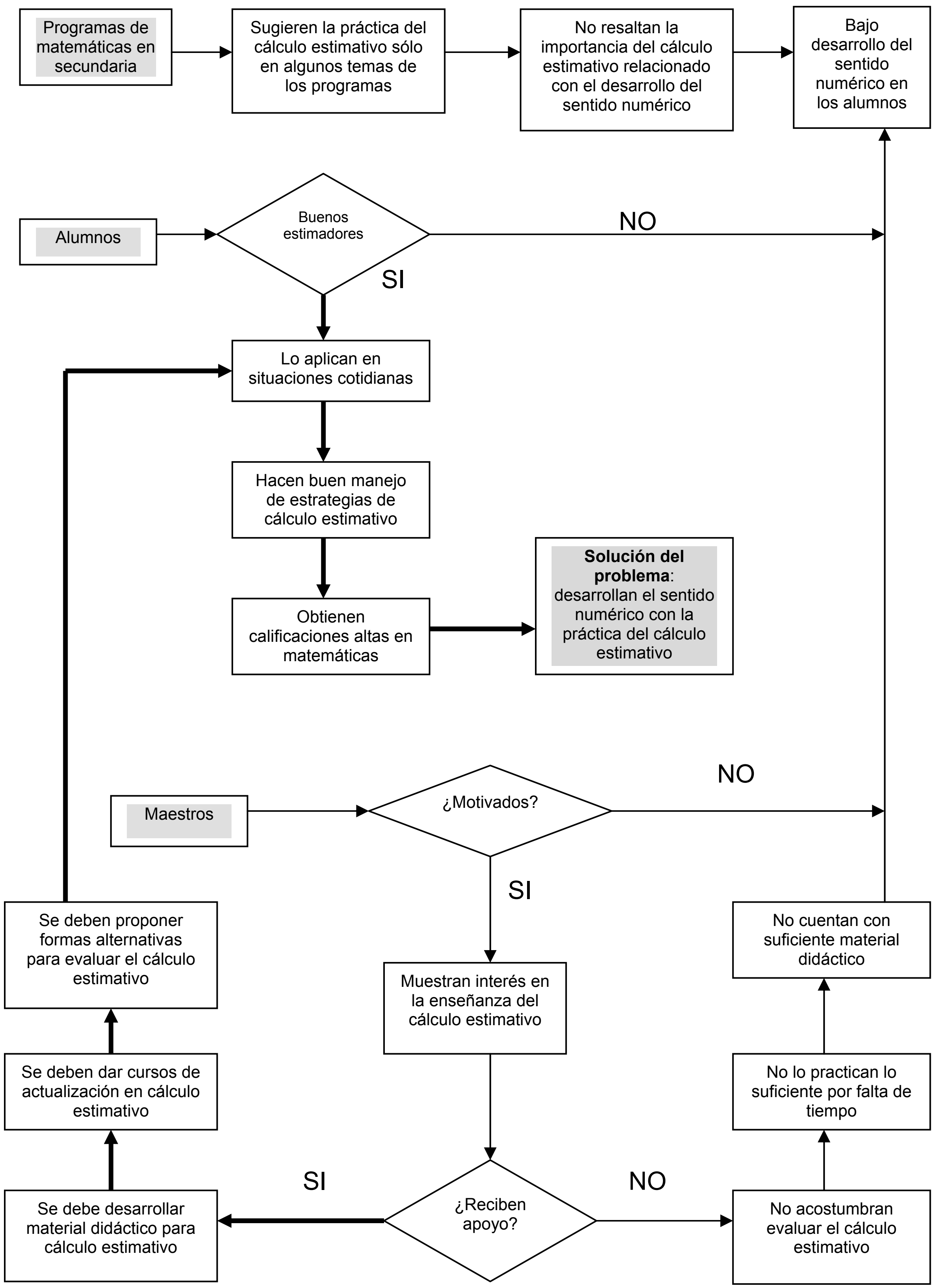

Figura 1. Ambiente detectado alrededor del cálculo estimativo en secundaria

4.2.3 Síntesis conceptual

De manera general, los alumnos participantes mostraron un rendimiento bajo en las habilidades de cálculo estimativo. Sin embargo, se observó que los alumnos seleccionados para las entrevistas han manejado este tipo de cálculos a través de su vida cotidiana de manera intuitiva, a pesar de que no se les enseña en las escuelas,

El ambiente alrededor de la enseñanza del cálculo estimativo detectado, puede sintetizarse en los siguientes términos: los programas de matemáticas en educación media señalan el uso de cálculos estimativos en algunos temas, pero no resaltan su importancia para lograr un adecuado desarrollo del sentido numérico. Por otro lado, los docentes enfrentan el problema de que no siempre pueden concluir un programa escolar satisfactoriamente, ni hacer espacio en sus clases para incluir otros temas. En el caso de la estimación de resultados, lo consideran un tema aparte. Según la opinión de algunos alumnos, ciertos maestros sí les piden cálculos de memoria, sin embargo, lo enfocan a resultados exactos. Ejemplos de algunos comentarios fueron: "sólo exactos y en pocas ocasiones", "donde me los piden es en la clase de química". Por otro lado, el material didáctico sobre el conocimiento del cálculo estimativo es escaso. Un alumno entrevistado comentó: "en un libro vienen algunos ejercicios".

En la forma de aplicar el examen estimativo, se pudo observar que los alumnos no están acostumbrados a que se les presenten las preguntas proyectadas en la pared para su lectura. Dicha situación provocó fuertes exclamaciones de sorpresa y en ocasiones de inconformidad. Se puede decir que se sintieron inseguros al no tener en sus manos un examen escrito. Asimismo, cuando se les indicaba que se iba a proyectar la siguiente pregunta, su nerviosismo era patente, a pesar de la explicación de que dichos ejercicios no eran parte de su calificación escolar y de ninguna manera les iba a perjudicar en la evaluación de matemáticas. Probablemente no pueden dejar de pensar que por el hecho de estar en la escuela, tienen que obtener buenas calificaciones.

Por su parte, cada vez que se visitaron las escuelas, tanto directivos como maestros aceptaban entusiasmados que se llevara a cabo el estudio en sus planteles. Hubo quien solicitó que se aplicara el examen estimativo a todos los grupos del plantel a su cargo, y maestros que expresaron su opinión sobre la necesidad de que se promovieran este tipo de programas. A su vez, los alumnos entrevistados siempre expresaron que consideraban importante el cálculo estimativo y que lo utilizan en su vida diaria. Algunos ejemplos de lo que expresaron sobre cómo o cuándo lo utilizaban fueron: “cuando le cuento el dinero a mi mamá”, “cuando hago cuentas chicas”, “cuando voy a la tienda”, “cuando uno va a comprar algo y lleva cierto dinero, se calcula cuanto va a gastar”, “cuando llego a mi casa, mi papá siempre me pide que haga algunas cuentas de memoria, porque cree que soy inteligente”, “cuando voy con mi mamá al mercado y llevamos cierta cantidad de dinero, entonces compramos primero lo más indispensable y voy haciendo las cuentas de memoria, para ver que nos alcance y luego compramos lo demás”, “lo aplico cuando las cuentas están difíciles para aproximarlas, porque para las fáciles no hace falta”, “cuando quiero hacer cuentas rápidas en la escuela y en la tienda”.

En los alumnos entrevistados se observó, en general, un buen manejo de estrategias de cálculo estimativo, aunque hubo quien en momentos no pudo superar la presión de estar siendo videograbado y dio algunas respuestas erróneas o simplemente se negó a contestar. Sin embargo, a pesar de la presión que sentían por la cámara, llegó un momento en que la mayoría se olvidó que estaban siendo observados y pudieron concentrarse en las preguntas. Los alumnos entrevistados siempre buscaron sustituir los datos originales de los ejercicios por números más fáciles de manejar, lo cual dio como resultado respuestas más rápidas. Adicionalmente, para evitar que los errores fueran grandes, la mayoría también hizo ajustes finales.

5. DISCUSIÓN

En este apartado se presenta una interpretación de los resultados obtenidos en la presente investigación, con relación a estudios anteriores, y una descripción de las conclusiones a las que se llegó basada en los supuestos teóricos descritos al inicio del trabajo. Del mismo modo, se señalan algunas recomendaciones que pudieran servir como actividades en el salón de clases, así como base para futuras investigaciones.

5.1 Interpretación de los resultados

A pesar de que el número de investigaciones sobre cálculo mental estimativo aumentó con respecto a las publicaciones existentes antes de 1980 (Sowder, 1992), y que ha habido recomendaciones de algunas agrupaciones como el *National Council of Teachers of Mathematics* (1989) sobre el hecho de incluir el cálculo estimativo en la *curricula* escolar, los resultados de investigaciones sobre dicho tema señalan que no se enseña en las escuelas. En México se firmó, en 1993, el Acuerdo Nacional para la Modernización de la Educación Básica (ANMEB) manifestando la intención de incluir tales recomendaciones. Sin embargo, se observó que los alumnos participantes en el presente trabajo no reciben instrucción ni practican dicho tema en las escuelas, lo cual significa que no es una actividad sistemática y contínua que se desarrolle con el trabajo diario de los maestros.

Se pudo observar que a determinados alumnos les llamó la atención esta clase de reactivos, ya que al final del examen preguntaron dónde podían encontrar más ejercicios, o si se les iba a dar un curso de cálculo mental porque ellos sí lo practicaban a diario, sobre todo cuando los mandaban a la tienda. Dicha situación puede resultar muy interesante y coincide con los resultados de Weber (1996), quien encontró que los niños que inician la escuela tienen habilidades para hacer algunos cálculos, basados en su entendimiento intuitivo de número y cantidad que han adquirido empíricamente en su ambiente. Sin embargo, al llegar a la parte formal de la escuela surgen dos problemas: el primero, es que la clase de matemáticas se convierte en un manejo de símbolos con procedimientos fijos ajenos a los conceptos de número y cantidad y, el segundo, es que dicha enseñanza no se centra en la reconstrucción de conocimientos. Derivado de algunas observaciones en este estudio, pareciera que los docentes son ajenos a los señalamientos anteriores; sin embargo, al no contar con material didáctico adecuado, indudablemente descuidan la enseñanza del cálculo estimativo.

Vázquez (1994), por su parte, estudió las estrategias de cálculo mental en alumnos de primaria y secundaria en el municipio de Ciudad Netzahualcóyotl en el Estado de México, donde la mayoría de los alumnos participantes en dicha investigación realizaban trabajos de comercio informal, lo cual al parecer, los habilitó en cálculos estimativos y exactos. En los resultados de la investigación de Vázquez (*op. cit.*) se reportaron porcentajes altos de aciertos en el examen de cálculo mental aplicado, inclusive un alumno contestó en forma correcta el 100% de las preguntas. Se pudo observar la ventaja que tuvieron dichos alumnos al practicar cálculos mentales en sus actividades diarias. El trabajo de Silver (1990), por su parte, confirmó precisamente las ventajas de la enseñanza en un contexto real de dicho tema.

Silver (*op. cit.*) señaló que no obstante el cálculo estimativo se puede estudiar en forma descontextualizada, sugiere que se hagan a un lado dichas suposiciones y se traten como procesos involucrados en contextos definidos. Esto también se observó en el presente trabajo, puesto que el mayor número de aciertos que obtuvieron los alumnos en el examen de cálculo mental estimativo fue en las preguntas planteadas en situaciones contextuales relacionadas con su ambiente cotidiano. En el mismo trabajo, Silver (1990) resaltó la importancia de hacer entrevistas a los alumnos considerados buenos estimadores, por la riqueza que contienen sus comentarios y para registrar la forma como razonan y toman decisiones en la solución de problemas, ya que dicha información se pierde si se deja el trabajo de evaluación en el papel. Con base en lo anterior, en esta investigación se entrevistaron los buenos estimadores y se eligieron adicionalmente tres alumnos que no lo eran para comparar sus respuestas. Los buenos estimadores mostraron un manejo adecuado del número y sus operaciones a diferencia de quienes no lo fueron. Mientras los primeros fueron capaces de elegir uno o varios caminos para encontrar la respuesta, por ejemplo cambiar los números de los datos por otros que les permitieran manejar los problemas de manera más sencilla y aplicar una o varias estrategias, los alumnos que no resultaron ser buenos estimadores trataban de hacer las operaciones como si estuvieran escritas en papel.

Investigaciones posteriores enfatizaron la importancia de la practica del cálculo mental estimativo para desarrollar en el estudiante el sentido numérico, y que esto debería ser tomado en cuenta en todos los programas escolares de matemáticas para evitar resultados tan bajos en los estudiantes, y para comprender que las matemáticas no son un conjunto de hechos y fórmulas aislados que se deben aprender de memoria. Dichas conclusiones se encontraron en el trabajo reportado por Reys *et al*. (1999), quienes llevaron a cabo investigaciones en Australia, Estados Unidos, Suecia y Taiwan y sintetizaron tres categorías respecto al sentido numérico: i) conocimiento y facilidad para manejar los números, ii) conocimiento y facilidad para manejar las operaciones, iii) aplicación del conocimiento de los números y las operaciones en las situaciones de cálculo. Además, identificaron dos componentes principales en cada una de estas categorías. Por un lado, el entendimiento del significado y efecto de las operaciones y, por otro, el entendimiento y uso de expresiones equivalentes. En el presente estudio se observaron dichas categorías en diferentes niveles en los alumnos que obtuvieron el mayor número de aciertos en el examen estimativo. Lo anterior apoya la idea de que el sentido numérico es un concepto universal; es decir, es desarrollado por los alumnos independientemente de su nacionalidad.

En la presente investigación, los alumnos a quienes se les aplicó el examen de cálculo estimativo obtuvieron en general muy bajas calificaciones, lo cual coincide con los resultados de algunas investigaciones hechas en Estados Unidos (Reys *et al*., 1982). En ambas investigaciones se señala que los buenos estimadores manejaron el redondeo como estrategia principal, y siempre hubo presencia de los proceso de traducción, reformulación y compensación en las respuestas de los alumnos. El trabajo de Reys *et al.* (*op. cit*.) sentó las bases para que se llevaran a cabo otras investigaciones afines en diferentes regiones del mundo. Tal fue el caso de la investigación llevada a cabo en el Centro de Investigación en Matemática Aplicada en Guanajuato por Flores *et al*. (1990), con niños de 5º de primaria y 2º de secundaria; la investigación de Reys *et al*. (1991) en la universidad de Tsukuba con niños de 2º, 4º, 6º y 8º grados; y la investigación de Reys *et al*. (1993) en Saskatoon, Canadá, con niños de 2º, 5º y 7º grados, entre otras.

Tanto en la investigación de Guanajuato como en Ensenada, los alumnos obtuvieron bajas calificaciones en el examen de cálculo estimativo y se sintieron descontrolados por la forma de presentación del examen, por lo que se puede sugerir que no se utiliza esta modalidad en dichas regiones del país. Sin embargo, se encontraron algunas diferencias entre los resultados de ambos trabajos. Se considera que los alumnos de Ensenada contestaron mejor el examen estimativo, ya que la calificación más alta fue de 25 aciertos, de un total de 39, y en la investigación de Guanajuato la mayor fue de 18 aciertos, de un total de 38. Otra diferencia se encontró en el resultado del desempeño académico de los alumnos de Ensenada debido a que la variable género sí presentó diferencias significativas a favor de los hombres, mientras que en Guanajuato no se dio este caso. Con respecto a las estrategias que usaron los buenos estimadores, los resultados de las entrevistas indicaron que el redondeo y el uso de números especiales fueron las más utilizadas en la presente investigación, mientras que en Guanajuato fueron las del dígito de la izquierda, algoritmos de lápiz y papel, y en menor proporción el redondeo. En los problemas de porcentajes, los alumnos de ambas regiones mostraron mayor variedad de aplicación de estrategias que en otros ejercicios. Especialmente en Ensenada, dichos resultados mostraron ingenio y flexibilidad en sus respuestas.

Sobre el análisis de las cinco preguntas más difíciles, ambas investigaciones coincidieron en que el ejercicio con mayor dificultad fue la multiplicación *98.6 x 0.041=* . Los alumnos no pudieron relacionar el 98.6 con el 100. Sin embargo, sucedió lo contrario con las cinco preguntas que les resultaron más fáciles, pues se encontró que coincidieron en cuatro de los cinco reactivos, los cuales fueron problemas contextuales (26, 27, 29 y 31). Cabe aclarar que los contextos fueron adaptados a las regiones de acuerdo a la cultura y costumbres de cada lugar.

Un punto importante de ambos estudios fue que se pusieron en evidencia los procesos señalados por Reys *et al.* (1982): reformulación, traducción y compensación a lo largo de las entrevistas. Asimismo, los alumnos coincidieron en señalar que no se les enseña cálculo estimativo en las escuelas, pero sí lo practican en diversas situaciones fuera de ellas. En general, se observó que los alumnos seleccionados para las entrevistas en el presente estudio mostraron seguridad en sus respuestas y un buen manejo de estrategias de cálculo estimativo.

En la universidad japonesa de Tsukuba, Reys *et al*. (1991) encontraron que los alumnos de 8º grado tenían un nivel más bajo en cálculo estimativo que los niños de 2º, 4º y 6º grados, debido a que en las escuelas primarias japonesas se hace más énfasis en cálculo mental y en las escuelas secundarias se descuida. Llama la atención en dicha investigación el hecho de que aparentemente los alumnos de secundaria olvidaron cómo resolver ejercicios de cálculo mental; no obstante, se consideró que el cálculo mental estimativo no tiene como único fin su enseñanza, sino que el alumno desarrolle un sentido numérico para comprender y manejar con más soltura sus clases de matemáticas. En ese sentido, los alumnos de 8º grado mostraron un buen desempeño. La enseñanza del cálculo mental estimativo en Japón se lleva a cabo en forma contraria a los señalamientos de la teoría de Case (1985; citado en Sowder, 1989), quién enfatizó que se debe tomar en cuenta que la memoria es dinámica y se relaciona con la edad de los alumnos. Para el autor, la edad entre 11 y 18 años es la más adecuada para aprender y practicar cálculos estimados y no se debe detener su enseñanza a esa edad. De la misma forma se observó en este trabajo que en México se descuida la enseñanza del cálculo estimativo en secundaria, a pesar de ser la etapa ideal para su aprendizaje, ya que la mayoría de los jóvenes inician estos estudios a los doce años y lo concluyen a los 14 años.

En la investigación de Reys *et al*. (1993) en Saskatoon, Canadá, también se reportó un bajo desempeño en cálculo estimativo. La recomendación de dichos autores fue que, antes de incorporar el cálculo estimativo en las escuelas, se debe promover entre los docentes su importancia y los beneficios de su enseñanza, para que de esa forma se apropien de él. Del mismo modo Sowder (1989) reforzó la idea de convencer, primero, a los maestros del valor que representa la enseñanza del cálculo estimativo y, después, pedirles que lo enseñen.

En Ensenada, tanto los maestros de matemáticas como los directivos de las escuelas resaltaron la importancia del cálculo mental, aunque reconocieron que no hay material didáctico adecuado para incorporarlo a sus clases. Asimismo, las autoridades de la materia en el municipio ofrecieron toda clase de facilidades para continuar con investigaciones similares, así como para trabajar con un grupo desde el inicio de su educación secundaria y durante la misma, en un programa de cálculo mental estimativo, y llevar un seguimiento del mismo.

5.2 Conclusiones

Los alumnos que participaron en el estudio obtuvieron bajas calificaciones en el examen de cálculo estimativo y se mostraron descontrolados por tener que contestar un examen con límite de tiempo y con preguntas proyectadas en una pantalla. En las respuestas del examen también se observó que los alumnos participantes tienen un sentido numérico incipiente y aparentemente la instrucción que reciben no lo desarrolla al 100%, por lo cual algunos llegan a formarse una opinión negativa de las matemáticas ya que la conciben como un conjunto de conocimientos sin sentido y consecuentemente muestran poco o nulo aprecio. Lo anterior corrobora el supuesto inicial de la presente investigación acerca de que el cálculo estimativo no se enseña en las escuelas mexicanas de manera sistemática, originando un bajo desempeño general de los alumnos en dicha habilidad.

Con respecto a la dificultad del instrumento para seleccionar a los mejores estimadores se puede concluir que fue alta. Lo anterior se apoya en los resultados arrojados por los índices de dificultad y de discriminación calculados para cada pregunta. De los 39 reactivos del examen, 15 preguntas deberán ser revisadas para adaptarlas mejor al nivel de los alumnos y nueve están en posibilidad de mejorarse; lo anterior de acuerdo a la tabla de valores señalados por Ebel *et al*. (1986; citados en Backhoff *et al*., 2000).

Durante la aplicación de las pruebas y al proyectar algunos ejercicios en la pantalla se oían quejas, exclamaciones de miedo, o surgían preguntas como: “¿qué es eso?” “¿puedo usar la calculadora?” “¿qué pasa si no la contesto?” por lo que se puede concluir que los alumnos no están acostumbrados a trabajar operaciones mentales con más de tres cifras, ni con fracciones o números decimales. También hubo cinco alumnos que no pudieron superar la presión de saber que estaban haciendo un examen, y aunque se les indicó varias veces que no era una calificación de la escuela, usaron la calculadora o hicieron las cuentas sobre las bancas o en las palmas de sus manos para contestar de manera exacta, por lo que dichos exámenes se anularon.

Se puede señalar que el examen estimativo funcionó adecuadamente para seleccionar a los buenos estimadores. Sin embargo, es conveniente revisar algunos reactivos, especialmente aquellos con valores bajos en el índice de discriminación.

Con relación a los alumnos seleccionados como buenos estimadores, todos expresaron que sí estiman resultados y además lo hacen con agrado y por costumbre, principalmente en actividades no escolares. Por ejemplo, cuando van a las tiendas o le cuentan el dinero a sus papás. Dichos alumnos tienen promedios escolares en matemáticas entre nueve y diez, lo cual ratifica el supuesto inicial de la investigación sobre que los alumnos exitosos en trabajos de cálculo estimativo tienen buen desempeño general en matemáticas.

Una situación que se repitió en todas las escuelas, fue la satisfacción de los directivos y maestros al saber que algunos de sus alumnos habían sido seleccionados para continuar participando en la presente investigación por lo que dieron toda clase de facilidades para la realización de las entrevistas. En general, se puede decir que tanto autoridades y docentes estuvieron de acuerdo en propiciar un nuevo enfoque a la enseñanza de las matemáticas y aceptan con agrado este tipo de investigaciones.

Por su parte los alumnos elegidos mostraron sentimientos de alegría y orgullo, aunque algunos también se sorprendieron. La cámara de video los intimidó en un principio, pero se fueron tranquilizando poco a poco. Se pudo observar que los alumnos entrevistados contestaron con mucha naturalidad y en general se mostraron muy seguros; sólo en los ejercicios de números fraccionarios algunos llegaron a titubear. Sin embargo, su lenguaje matemático reflejó mucha imprecisión. No utilizaron conceptos elementales tales como decenas, centenas o unidades, pues las sustituyeron en las entrevistas por “este”, “el de acá”, “lo de ahí”, “con lo de allá”. Es posible que algunos maestros hagan lo mismo o que no les exijan que se expresen aplicando los términos matemáticos apropiados.

Con respecto a los ejercicios que tuvieron que resolver durante la entrevista, se puede concluir que entendieron muy bien las instrucciones y comentaron en voz alta sus respuestas. Los ejercicios de sumas con números enteros fueron contestados correctamente por todos los alumnos y aplicaron correctamente las estrategias de cálculo mental, lo mismo sucedió con los ejercicios de multiplicación de enteros. Sin embargo en los ejercicios donde aparecieron números fraccionarios o decimales hubo varias fallas. En realidad no se pretendió que hicieran operaciones con fracciones, sino que identificaran los valores enteros a los que se aproximaban las fracciones de los ejercicios para poder operar con ellos más fácilmente. De lo anterior se concluye que no se enseñan ni se practican dichas estrategias en las escuelas.

Sobre el análisis de las estrategias elegidas por los alumnos entrevistados, se observó que la estrategia más utilizada fue el redondeo. El manejo de los dígitos de la izquierda lo hacen de manera intuitiva y correcta. Las estrategias llamadas números compatibles y números especiales requieren del conocimiento de otras estrategias, por lo que para tener un dominio de ellas se requiere de un entrenamiento en las escuelas. Con respecto al agrupamiento de números, sólo algunos de los ejercicios de las entrevistas se resolvían con dicha estrategia, la cual era fácilmente reemplazable por otras y, por lo tanto, fue utilizada escasamente. Finalmente, los algoritmos de lápiz y papel los usaron solamente en seis ocasiones. Considerando lo anterior, se concluye que los alumnos seleccionados sí eran buenos estimadores.

Sobre los procesos mentales más utilizados por los alumnos participantes se encuentra la reformulación, precisamente, porque las estrategias de cálculo mental que incluye son las de redondeo y dígito de la izquierda, las cuales fueron en promedio las estrategias más usadas.

Por último, se observó que algunos alumnos, al momento de hacer un cálculo estimativo, olvidaron hacer un ajuste final para tener una mejor respuesta, por lo que sus errores se pueden corregir con una recomendación de no olvidar el ajuste ya sea final o durante alguna parte del procedimiento.

Después de revisar la interpretación de los resultados, se puede concluir que algunas de las estrategias y procesos que se detectaron en los buenos estimadores también fueron detectadas por Reys *et al*., (1982) en la investigación de Missouri, así como en Guanajuato (Flores *et al.*, 1990), por lo que el presente estudio tiene un alto grado de validez en sus resultados, así como coincidencia con la identificación y clasificación de las estrategias y los procesos de estimación determinadas por Reys *et al*., (*op. cit*.).

5.3 Recomendaciones

Se debe considerar el entusiasmo que muestran los docentes y las autoridades, tanto de los centros escolares como los responsables de la materia de matemáticas para plantear algunas propuestas, tales como: implementar cursos de capacitación a maestros, revisión de textos escolares para detectar el espacio dedicado al cálculo estimativo, trabajar programas de cálculo mental estimativo con grupos piloto en algunas escuelas y darles un seguimiento formal durante su educación secundaria.

Por su parte, la recomendación expresada en el Acuerdo Nacional para la Modernización de la Educación Básica en México (ANMEB) de incluir el cálculo mental en los temas de números enteros y números decimales, no es suficiente. Se recomienda enfatizar su importancia para el desarrollo del sentido numérico como su propósito más importante y motivar a los docentes para que lo incluyan en sus clases diarias.

Los directivos de las escuelas participantes expresaron la queja de que cuando se lleva a cabo una investigación en sus planteles nunca se les informa de los resultados obtenidos, por lo que se les hará llegar un pequeño informe de los resultados y conclusiones del presente trabajo. Se sugiere la formación de un taller para maestros donde se amplíe la información de los resultados y se diseñen ejercicios para el salón de clases, e inclusive implementar ejercicios para que los alumnos generen sus propios materiales de trabajo con ayuda de sus calculadoras.

Sobre investigaciones futuras, es necesario estudiar cómo se podría medir en clases el desempeño en cálculo estimativo de forma más eficiente y que a la vez resulte sencillo para los docentes.

Se recomienda replicar investigaciones como la presente en otras regiones del país, considerando los resultados de los índices de dificultad de los reactivos del examen estimativo para mejorarlos. Adicionalmente, es recomendable ampliar los estudios para precisar el efecto del contexto en los ejercicios, pues al parecer los alumnos comprenden mejor un ejercicio contextual que uno puramente numérico. También es importante considerar que en el momento de aplicar el examen estimativo no es suficiente mostrar sólo dos ejemplos con números enteros a los alumnos. Sería preferible darles cuatro o cinco ejemplos con diferentes operaciones e incluir números decimales, para que no se sientan descontrolados durante el examen.

Por otro lado, es importante replicar esta investigación en el mismo municipio de Ensenada para tratar de dar respuesta a algunas preguntas que surgieron durante el desarrollo de la misma. Se sugiere, por ejemplo, aplicar el examen estimativo a todos los grupos de un mismo grado, para poder hacer un análisis comparativo de centros escolares, no con la finalidad de decir que escuela es mejor, sino para indagar que método se aplica en dichos planteles.

Al mismo tiempo se puede hacer un análisis comparativo de grupos por edades, dado que en la mayoría de las escuelas los grupos “A” se forman con los niños más pequeños y así sucesivamente dependiendo del número de grupos con que cuente la escuela.

En Japón (Reys *et al*., 1991) y en Canadá (Reys *et al*., 1993) investigaron cuáles ejercicios preferían hacer los alumnos con cálculo mental y cuáles con cálculos escritos; así mismo, se midió la actitud hacia ambos tipos de cálculos. Dada la importancia de lo anterior, se recomienda dirigir investigaciones en esa línea en diferentes regiones del país, para preparar material didáctico de cálculo mental estimativo que resulte adecuado para los jóvenes mexicanos y sugerir su uso en los programas escolares.

Es recomendable extender las investigaciones de cálculo estimativo a materias como geometría y álgebra, campos en los cuales ya existen algunos trabajos (Coburn y Shulte, 1986).

Finalmente sería conveniente, para futuros trabajos, profundizar en el estudio de cómo el cálculo mental estimativo desarrolla factores intelectuales tales como la concentración, la atención y la reflexión, entre otros.

ANEXO A

EXAMEN ESTIMATIVO

- Objetivo del examen estimativo
- Ejercicios del examen de cálculo estimativo
- Hoja de respuestas para el examen de cálculo estimativo

ANEXO B

ENTREVISTAS

- Objetivo de las entrevistas
- Sugerencias para la aplicación de las entrevistas
- Preguntas de introducción para las entrevistas
- Ejercicios de cálculo mental aplicados en las entrevistas

ANEXO C

TRANSCRIPCIÓN DE LAS ENTREVISTAS

- Objetivo de la transcripción de las entrevistas
- Hoja para transcripción de las entrevistas

ANEXO D

DISTRIBUCIÓN DE ACIERTOS Y ERRORES OBTENIDOS

POR LOS MEJORES ESTIMADORES EN EL EXAMEN

DE CÁLCULO ESTIMATIVO

ANEXOS

- **Objetivo del examen estimativo**

El examen estimativo pretende detectar a los alumnos que son buenos estimadores, está dirigido a estudiantes de 2º nivel de secundaria. Debido a que las preguntas se proyectaron, las hojas de examen que se les entregaron a los estudiantes, solamente son las hojas de respuestas, sin instrucciones escritas. Dichas instrucciones las debe exponer el examinado en forma oral. La intención es que el alumno observe las preguntas proyectadas a través de acetatos y calcule mentalmente un resultado aproximado del reactivo, escribiendo sólo la respuesta en el lugar correspondiente al número de la pregunta.

- **Ejercicios del examen de cálculo estimativo**

______	**Acetato B: ejemplo** 87,419 92,765 + 90,045 81,974 <u>98,102</u>
Acetato 1: 89 +382 <u>706</u>	**Acetato 2:** 7,465 <u>- 572</u>
Acetato 3: 37,689 <u>-18,812</u>	**Acetato 4:** 28 <u>x 47</u>
Acetato 5: 6,809 <u>x 91</u>	**Acetato 6:** 31 x 68 x 298 =

Acetato 7:

$$\frac{713}{8}$$

Acetato 8:

$$8{,}127\,\overline{\big)\,474{,}257}$$

Acetato 9:

$$\frac{22}{72}$$

Acetato 10:

$$\frac{(347 \times 6)}{43}$$

Acetato 11:

$$0.7 + 0.002 + 0.81$$

Acetato 12:

$$\begin{array}{r} 486 \\ \underline{\times\ 0.24} \end{array}$$

Acetato 13:

$$\frac{289}{71.8}$$

Acetato 14:

$$308 - 2.85$$

Acetato 16:

$1 \frac{1}{2} \times 1.67$

Acetato 17:

$1 \, {}^{7}/_{8} \times 1.19 \times 4$

Acetato 18:

$$\begin{array}{r} 6.31 \\ \underline{\times\ 0.8} \end{array}$$

Acetato 19:

$$\begin{array}{r} 98.6 \\ \underline{\times\ 0.041} \end{array}$$

Acetato 20:

5.1 x 4.8 x 6.3

Acetato 21:

$1.06 \overline{)\ 648}$

Acetato 22:

$.095 \overline{)7{,}029.6}$

+

Acetato 24:

(21/23) x 149

Acetato 25:

$(2\ ^{2}/_{5}) - (2\ ^{7}/_{8})$

Acetato 26:

Con una lata de pintura se cubren 7.47 m^2, ¿Cómo cuántos m^2 se cubren con 4 latas?

Acetato 27:

¿Cómo cuánto gastará Esmeralda en 3.5 m de tela, si el m cuesta $ 23?

Acetato 28:

En una maquiladora pagan $238 en el turno nocturno por día ¿Cómo cuánto ganará un empleado a la semana?

Acetato 29:
Para un concierto de rock, había 12,367 boletos, pero por lluvia sólo se vendieron 3, 788. ¿Cómo cuántos boletos se quedaron sin vender?

Acetato 30:
Los alumnos necesitan dinero para el grupo que tocará en su graduación. Cada alumno debe cooperar con $92.00 y son 46 ¿Cómo cuánto les cobran?

a
glo?

Acetato 32:
Esta es una cuenta del mercado que aún no ha sido sumada, ¿Cómo cuánto es el total?

$$\begin{array}{r} 488 \\ 487 \\ +\ 506 \\ 497 \\ \underline{512} \end{array}$$

Acetato 33:

¿Cómo cuánta área tiene este rectángulo?

47

28

Acetato 34:
Una casa de Villas del Real, cuesta $117,450. Si los papás de Claudia compraron una con $44,900 de enganche ¿Cómo cuánto les falta por pagar?

Acetato 35:

En el recreo se vendieron 24 tortas de $5.40 cada una ¿Cómo cuánto se ganó?

Acetato 36:
Un grupo de 48 alumnos cooperó para la compra de un microscopio, si todos aportaron la misma cantidad y se juntaron $1,322 ¿Cómo cuánto dio cada uno?

Acetato 37:
Para construir un salón de usos múltiples se necesitan $26,400. Se pide la cooperación a 12 grupos de la escuela, ¿Cómo cuánto tiene que dar cada grupo?

Acetato 38:
La sociedad de padres de familia de una escuela donó 15.75 m^2 de tela para hacer cortinas ¿Cómo cuántas cortinas salen si cada ventana lleva 0.95 m^2?

Acetato 40:

¿Te consideras un buen estimador?

Acetato 41:

¿Crees que estimar es importante?

Acetato 42:

¿Tienes calculadora en tu casa?

Acetato 43:

¿Te dejan emplear la calculadora en tu casa?

Acetato 44:

¿Usas la calculadora regularmente?

- **Hoja de respuestas para el examen de cálculo estimativo**

Instrucciones.- Atiende a las explicaciones en voz alta, que te dará el examinador encargado de ponerte el examen. Si tienes dudas, puedes preguntarle a esa misma persona.

Apellidos: ______________________________Nombre:__________________
Escuela :_______________________________Turno :__________________
Grado :_______________________________ Grupo:__________________
Edad :__________________________Sexo: (M o F):__________________

Respuestas de los ejemplos:
A. _______________________ B. ________________________

Respuestas del examen:

1.________________________	14. ________________________
2. ________________________	15. ________________________
3. ________________________	16. ________________________
4. ________________________	17. ________________________
5. ________________________	18. ________________________
6. ________________________	19. ________________________
7. ________________________	20. ________________________
8. ________________________	21. ________________________
9. ________________________	22. ________________________
10. _______________________	23. ________________________
11. _______________________	24. ________________________
12. _______________________	25. ________________________
13. _______________________	

26. ______________________	33. ______________________
27. ______________________	34. ______________________
28. ______________________	35. ______________________
29. ______________________	36. ______________________
30. ______________________	37. ______________________
31. ______________________	38. ______________________
32. ______________________	39. ______________________

II.- En las siguientes preguntas, encierra en un círculo la respuesta que consideres adecuada.

40.	SI	NO	NO SE
41.	SI	NO	NO SE
42.	SI	NO	
43.	SI	NO	
44.	SI	NO	

- **Objetivo de las entrevistas**

Las entrevistas están dirigidas a los alumnos de 2º de secundaria que son buenos estimadores, en ellas se sigue un protocolo de preguntas que introducen al entrevistador con el estudiante, para después presentarle una serie de 10 ejercicios escritos, que tendrá que responder en forma oral. Las entrevistas se registrarán en cinta de video, para su posterior análisis. El entrevistador y una tercera persona tomarán notas sobre lo que responda el estudiante, y sobre algún punto que consideren importante durante el desarrollo de las entrevistas.

- **Sugerencias para la aplicación de las entrevistas:**

Debido a que cada entrevistador tiene su propio estilo y diferentes fortalezas que hagan que cada entrevista sea ligeramente distinta, es esencial que cada entrevistador siga las mismas guías generales.

Indicaciones para ayudar a guiar la entrevista:

1.- Hacer que el alumno se sienta cómodo y relajado. Se le puede pedir que hable de sí mismo, o el entrevistador hablarle de él mismo. Hay que recordar que hay tres extraños en el salón y el alumno puede sentirse abrumado. Si el alumno está tranquilo, estará más dispuesto a comentar en voz alta y a revelar su pensamiento mientras hace cálculo estimados

2.- Hacer entender al alumno que es importante que diga todo lo que pueda acerca de cómo está pensando. Hay que alentarlo a pensar en voz alta.

3.- Aclararle que se permiten salidas en falso, esto es, un alumno puede resolver un problema usando una estrategia específica y encontrar que no es la correcta, por tanto puede cambiar de técnica. Es importante conocer porque cambió el enfoque de un problema.

4.- El entrevistador se debe sentir en libertad para profundizar en los problemas, haciendo cualquier pregunta que parezca apropiada.

5.- Si el alumno quiere registrar algunas cosas por escrito, se le puede permitir, pero hay que recordar que lo que interesa, es lo que piensa. Se le pueden hacer preguntas sobre lo que escribió para estar seguros del pensamiento que acompaña a la escritura.

6.- No hay tiempo límite en ninguno de los problemas.

7.- Si un alumno trabaja un problema incorrectamente o reporta una estimación no aceptable, no se debe interpretar lo que esté haciendo, ni tratar de darle alguna enseñanza. El alumno debe explicar lo que hizo y por qué.

8.- Si un alumno no puede avanzar en la solución de un problema, se debe decir algo como: “este es un problema difícil, tal vez lo veamos luego” y proseguir con el siguiente problema.

9.- Los miembros del equipo pueden pensar en una pregunta pertinente que no haya sido hecha por el entrevistador. Los miembros deben anotar la pregunta en un papel y pasarse a la persona que realiza la entrevista.

- **Preguntas de introducción para las entrevistas**

Para empezar a platicar con el alumno entrevistado, se le debe de decir lo siguiente: como sabes, hemos probado las habilidades de estimación de muchos estudiantes a través del examen estimativo. Al revisar las estimaciones que cada alumno dio en tu escuela, noté que hiciste un buen trabajo.

Nos interesa platicar con los alumnos que fueron los mejores estimadores, para descubrir y entender la forma en que estimaron, por eso es que queremos hacerte algunas preguntas.

¿Piensas que la estimación es importante?. Dime por qué.
¿Usas tú la estimación?. Dame un ejemplo.
¿Hacen estimaciones en tu clase de matemáticas?
Si la respuesta es sí, se le pide un ejemplo.

Te voy a mostrar algunos problemas y me gustaría que estimaras la respuesta de cada uno. Conforme estimas, quiero pedirte que me digas lo que estás pensando. Esto me ayudará a entender cómo haces tus estimaciones. Tal vez creas que algunas de las cosas que piensas no son importantes, pero me ayudarán a entender mejor qué estás pensando, así que por favor piensa en voz alta. ¿Me entendiste?

- **Ejercicios de cálculo mental aplicados en las entrevistas**

Los siguientes ejercicios se le presentarán al alumno entrevistado uno por uno y se le pedirá que lo resuelva, pensando en voz alta. El entrevistador anotará todo lo que considere que es relevante para conocer su forma de pensar y la estrategia que está utilizando. Los cinco primeros ejercicios son de cálculos puros y los otros cinco, son problemas dentro de un contexto.

Ejercicio 1.-

$$\begin{array}{r} 87{,}419 \\ 92{,}765 \\ +\ 90{,}045 \\ 81{,}974 \\ \underline{98{,}102} \end{array}$$

R=______________________________

Ejercicio 2.-

$8{,}127 \overline{\big)\ 47{,}4257}$

R=______________________________

Ejercicio 3.-

12 / 13 + 7 / 8

R=______________________________

Ejercicio 4.-

486 x 0.24

R=______________________________

Ejercicio 5.-

¿Cómo cuánta área tiene este rectángulo? 28

47

R=______________________________

Problema 1.-

Si alrededor del 30 % de los aficionados de un partido de béisbol, compraron un refresco, ¿cómo cuántos refrescos se vendieron en el partido, si el número de asistentes fue de 54,215?

R=____

Problema 2.-

Las ganancias de una serie de béisbol fueron de $21’319,908.00. Si este dinero se divide entre los 26 equipos participantes, ¿cómo cuánto recibirá cada equipo?

R=____

Problema 3.-

Esta es una nota del mercado que no ha sido sumada. Estima el total.

79
79
44
130
34
105
57
+ 29
65
30
31
429
11
34
8

R=____

Problema 4.-

Estima de cuánto es el descuento de una chamarra que cuesta $2,800.00, si tiene un anuncio que indica el 15% de rebaja.

R=____

Problema 5.-

Un alumno se equivocó en dos de los siguientes ejercicios:

a) $^{4}/_{9} + {}^{5}/_{10} = 1\,{}^{5}/_{90}$

b) $^{5}/_{8} + {}^{4}/_{7} = {}^{8}/_{15}$

c) $^{8}/_{15} + {}^{11}/_{20} = 1\,{}^{1}/_{12}$

¿Cuál es el ejercicio correcto?

R=____

- **Objetivo de la transcripción de las entrevistas**

Mediante la transcripción de las entrevistas se pretende detectar los procesos de pensamiento y las estrategias de cálculo estimativo que utilizan los alumnos que son buenos estimadores.

- Hoja para transcripción de las entrevistas (Martínez, 1998)

Estrategias de cálculo mental estimativo y procesos de pensamiento	**No. renglón**	**Texto**

6. REFERENCIAS

Backhoff, E., Larrazolo y N., Rosas, M. (2000). Nivel de dificultad y poder de discriminación del Examen de Habilidades y Conocimientos Básicos (EXHCOBA). *Revista electrónica de Investigación Educativa, 2* (1), 2-16.

Bonilla, E. (1989). La educación matemática: una reflexión sobre su naturaleza y sobre su metodología. *Educación Matemática, 1* (2), 28-42.

Bonilla, E., Block, D. y Waldegg, G. (eds.). (1993). La investigación educativa de los ochenta, perspectiva para los noventa. *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, 10*. México: Benito Juárez.

Burill, G. (1998). Changes in Your Classroom: From the Past to the Present to the Future. *Journal for Research in Mathematics Education, 29* (5), 583-596.

Carpenter, T., Hiebert, J. y Moser, J. (1981). Problem Structure and First Grade Children's Initial Solution Processes for Simple Addition and Subtraction Problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 12*, 27-39.

Carpenter, T. y Moser, J. (1984). The Acquisition of Addition and Subtraction Concepts in Grades One to Three. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*, 179-202.

Castelnuovo, E. (1989). Panorama de la enseñanza matemática en el tiempo y en el espacio. *Educación Matemática, 1* (3), 24-29.

Coburn, T. y Shulte, A. (1986). Estimation in Measurement. En Shoen, H. y Zweng, M. (Eds.) *Estimation and Mental Computation, 1986 Yearbook* (pp. 31-44). Iowa: NCTM.

D'Ambrosio, U. (1993). Mathematics: Secondary School Programs. En De Corte, E., Vershaffel, L. y Green, B. (Eds.) Mathematics Instruction: Contemporary research (Vol. 6, pp. 3661-3667). *The International Encyclopedia of Education.* Oxford: Pergamon.

De Vega, M. (1986). *Introducción a la psicología cognitiva*. México: Alianza.

Dowker, A. (1992). Computational Estimation Strategies of Professional Mathematicians. *Journal for Research in Mathematics Education, 23* (1), 45-55.

Ekenstam, A. (1977). On Children's Quantitative Understanding of Numbers. *Educational Studies in Mathematics, 8*, 317-332.

Flores, A., Reys, R. y Reys, B. (1990). Desempeño y estrategias en la estimación en operaciones aritméticas de alumnos de quinto de primaria y segundo de secundaria en México. *Educación matemática, 2* (1), 33-44.

Forrester, M. y Pike, D. (1998). Learning to Estimate in the Mathematics Classroom: a Conversation Analytic Approach. *Journal for Research in Mathematics Education, 29* (3), 334-356.

Gómez, B. (1988). *Numeración y cálculo*. Madrid: Síntesis.

Hazekamp, D. (1986). Components of Mental Multiplying. En Shoen H. y Zweng, M. (Eds.) *Estimation and Mental Computation, 1986 Yearbook* (pp. 116-124). Iowa: NCTM.

Hope, J. (1986). Mental Calculation: Anachronism or Basic Skill? En Shoen, H. y Zweng, M. (Eds.) *Estimation and Mental Computation, 1986 Yearbook* (pp. 45-54). Iowa: NCTM.

Hope, J. y Sherrill, J. (1987). Characteristics of Unskilled and Skilled Mental Calculators. *Journal for Research in Mathematics Education 18*, 98-111.

Kline, M. (1976). *El fracaso de la matemática moderna ¿Por qué Juanito no sabe sumar?* México: Siglo XXI.

Levin, J. (1981). Estimation Techniques for Arithmetic: Everyday Math and Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 421-434.

Lindquist, M. (1994). The Standars Have Increased our Level of Responsability. *Teaching Children Mathematics, 1* (1), 53-58.

Mancera, E. (1991). La matemática de la educación básica: el enfoque de la modernización educativa. *Educación matemática, 3* (3), 10-30.

Martínez, M. (1998). *La investigación cualitativa etnográfica en educación. Manual teórico práctico* (3ª ed.). México: Trillas.

Matlock-Hetzel, S. (1997, enero). Basic Concepts in Item and Test Analysis. Ponencia presentada en: Annual Meeting of the Southwest Educational Research Association, Austin, Texas.

Meza, M. (1994). *La enseñanza en la torre de Babel: la educación pública en Estados Unidos*. México: Más Actual Mexicana de Ediciones.

McIntosh, A., Reys, B. y Reys, R. (1992). A Proposed Framework for Examining Basic Number Sense. *For the Learning of Mathematics, 12*, 2-8.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). En Crosswhite, J., Dossey, J. y Frye, S. (Eds.) NCTM Standars for school mathematics: visions for implementation. *Mathematics Teacher, 82* (8), 664-671.

Parra, C. (1994). Cálculo Mental en la escuela primaria. En Parra, C. y Saiz I. (eds.) *Didáctica de las matemáticas: aportes y reflexiones* (pp. 219-272). Buenos Aires: Paidós Educador.

Secretaría de Educación Pública (1993). *Plan y programas de Estudio de educación básica, secundaria*. México: Comisión nacional de los libros de texto gratuitos.

Resnick, L. (1989). Defining, Assessing, and Teaching Number Sense. En Sowder, J. y Schapelle, B. (Eds.) *Establishing Foundations for Research on Number Sense and Related Topics: Report of Conference, febrero 16-17,* (pp. 35-39). San Diego: San Diego State University.

Reys, B. (1986). Teaching Computational Estimation: Concepts and Strategies. En Shoen, H. y Zweng, M. (Eds.) *Estimation and Mental Computation, 1986 Yearbook* (pp. 31-44). Iowa: NCTM.

Reys, R., Bestgen, B., Rybolt, J., Wyatt, J. (1982). Processes Used by Good Computational Estimators. *Journal for Research in Mathematics Education, 13*, 183-201.

Reys, R., Reys, B., Nohda, N., Ishida, J., Yoshikawa, S. y Shimizu, K. (1991). Computational Estimation Performance and Strategies Used by Fifth and Eight Grade Japanese Students. *Journal for Research in Mathematics Education, 13*, 183-201.

Reys, B., Reys, R. y Flores, A. (1991). Estimation Performance and Strategy Use of Mexican 5th and 8th Grade Student Sample*. Educational Studies in Mathematics, 22*, 353-375.

Reys, B., Reys, R. y Hope, J. (1993). Mental Computation: A Snapshot of Second, Fifth and Seventh Grade Student Performance, *Journal for Research in Mathematics Education, 96* (6), 308-314.

Reys, R. y Yang, D. (1998). Relatioship Between Computational Performance and Number Sense Among Sixth and Eight Grade Students in Taiwan. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*, 225-237.

Reys, R., Reys, B., McIntosh, A., Emanuelsson, G., Johansson, B. y Yang, D. (1999). Assessing Number Sense of Students in Australia, Sweden, Taiwan and the United States*. Journal for Research in Mathematics Education, 99 (2)*, 61-70.

Ruiz, A. (1992). Las matemáticas modernas en las Américas: filosofía de una reforma. *Educación Matemática, 4* (1), 10-20.

Silver, E. (1990, septiembre). Treating Estimation and Mental Computation as Situated Mathematical Processes. Reporte de evalución. (Eric Document Reproduction Service No. ED 342645).

Sowder, J. (1989). Research into Practice: Developing Understanding of Computational Estimation, *Arithmetic Teacher 36* (5), 25-27.

Sowder, J. (1990). Mental Computation and Number Sense. *Arithmetic Teacher, 37* (7), 18-20.

Sowder, J. (1992). Estimation and Number Sense. En Sowder, J. (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Simon & Schuster.

Sowder, J. (1994). Research into Practice: Number Sense Making. *Arithmetic Teacher 41* (6), 342-345.

Stiglier, J., Lee, S. y Stevenson, H. (1991). *Mathematical Knowledge of Japanese, Chinese and American elementary school children*. Reporte de Investigación, Reston: NCTM. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 325398).

Usiskin, Z. (1986). En Shoen, H. y Zweng, M. (Eds.) *Estimation and Mental Computation, 1986 Yearbook* (pp. 1-15). Iowa: NCTM.

Vázquez, J. (1994). *Una investigación de las estrategias de cálculo mental utilizados por niños estudiantes de primaria y secundaria*. Tesis inédita de maestría en ciencias, especialidad en matemática educativa, CINVESTAV, IPN, México, D. F.

Waldegg, G. (1993). Contexto Educativo Mexicano durante la década 1982-1992. En Bonilla, E., Block, D. y Waldegg, G. (eds.) *Enseñanza y Aprendizaje de las matemáticas, 10*, 7-11.

Weber, W. (1996). Filling in the Gaps: an Experimental Study on Mental Computation Achievement and Strategies. Ponencia presentada en: The 1996 American Educational Research Association Annual Meeting. New York.